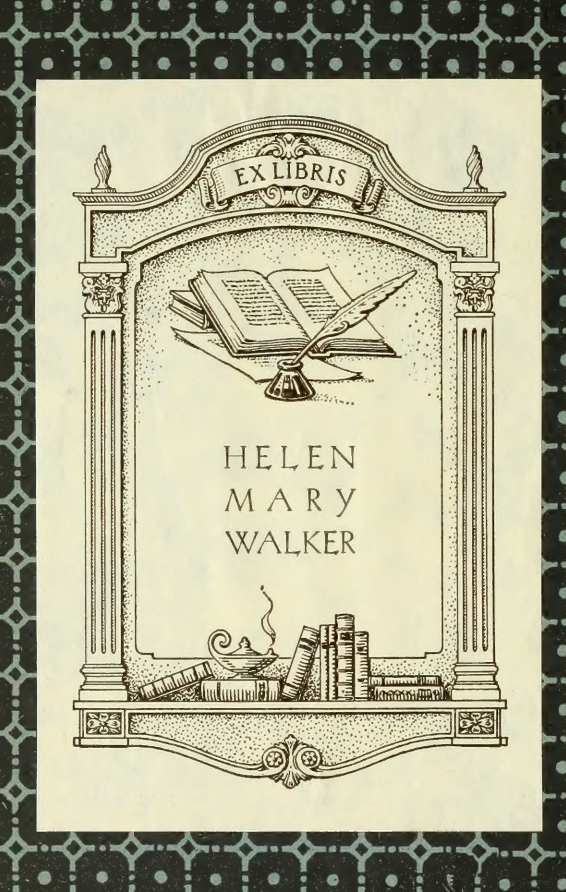



EX LIBRIS
HELEN
MARY
WALKER



Nicolaas Struyck

LES OEUVRES

DE

NICOLAS STRUYCK

(1687—1769)

QUI SE RAPPORTENT AU CALCUL DES CHANCES, À LA STATISTIQUE GÉNÉRALE, À LA STATISTIQUE DES DÉCÈS ET AUX RENTES VIAGÈRES, TIRÉES DES ŒUVRES COMPLÈTES

ET

TRADUITES DU HOLLANDAIS

PAR

J. A. VOLLGRAFF

DOCTEUR ÈS SCIENCES

ET

OFFERTES AUX MEMBRES DU SEPTIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL D'ACTUAIRES, RÉUNIS À AMSTERDAM EN SEPTEMBRE 1912

PAR

LA SOCIÉTÉ GÉNÉRALE NÉERLANDAISE D'ASSURANCES SUR LA VIE ET DE RENTES VIAGÈRES, ÉTABLIE À AMSTERDAM, DAMRAK 74.

AMSTERDAM

1912

AVANT-PROPOS.

Dans les »Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères«, offertes en 1898 par la Direction de la »Société Générale Néerlandaise« aux membres du Deuxième Congrès International d'Actuaires réunis à Londres, il est fait mention aux pages 85—99 de Nicolas Struyck et de ses oeuvres.

Lorsqu'il avait été décidé que le Septième Congrès International d'Actuaires aurait lieu à Amsterdam et que la Direction de la Société nommée avait formé le projet d'offrir de nouveau aux membres un livre se rapportant à l'histoire de la science actuarielle en Hollande, elle me posa dans ma qualité d'ancien membre de cette Direction et d'auteur de la plus grande partie des »Mémoires« mentionnées plus haut, la question de savoir quel ouvrage ayant trait à l'histoire de notre profession en Hollande intéresserait suffisamment les étrangers pour former le contenu de ce livre. Sans aucune hésitation je lui ai conseillé de choisir une traduction française des oeuvres de Nicolas Struyck qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères.

Je trouvai dans la personne de M. J. A. Vollgraff à Leyde un traducteur connaissant bien les deux langues et possédant en outre les connaissances mathématiques nécessaires. Les lecteurs du livre seront sans doute d'accord avec moi pour dire que la traduction n'aurait pas pu avoir été mieux faite. Je saisis cette occasion pour remercier sincèrement M. Vollgraff de la façon heureuse dont il s'est acquitté de son travail.

Je me suis adressé à quelques-uns de nos géographes et de nos astronomes dans le but de les exhorter à faire traduire en français les ouvrages si remarquables de Struyck sur des sujets de géographie et d'astronomie, et de les publier dans le même format que cette traduction-ci. Ce sont surtout ses études sur les comètes qui ont encore aujourd'hui une certaine importance. Il est vrai que les travaux de Struyck ne sont pas restés inconnus à l'étranger, mais la circonstance que, malgré ses connaissances linguistiques, il se servait toujours, à de rares exceptions près, de la langue hollandaise, est devenue la cause pour laquelle ses travaux n'ont pas attiré à l'étranger toute l'attention qu'ils méritaient. Toutefois mes efforts n'ont pas été couronnés de succès; on reconnaissait, il est vrai, l'importance d'une telle entreprise, mais les Sociétés qui pourraient s'en charger étaient déja si encombrées de travaux analogues que l'argent et le temps leur faisaient défaut. Je me plais à espérer que mes exhortations ne resteront pas toujours stériles.

Pour satisfaire ceux qui ne possèdent pas les »Mémoires« nommées je répéterai ici ce que je suis parvenu à savoir sur la personne de NICOLAS STRUYCK.

Il naquit à Amsterdam le 19 mai 1687. Il paraît qu'il n'existe aucune esquisse de sa vie. Il nous faut donc nous contenter des rares renseignements que nous avons pu trouver, par-ci, par-là, au cours de nos loisirs assez restreints. C'est grâce à lui-même que nous savons que son père avait également nom NICOLAAS et que sa mère s'appelait GEERTRUY WESDORP. Il réussit à faire remonter la famille de sa mère jusqu'en 1547, mais il ne connaissait pas celle de son père, par suite de la perte de »quelques papiers«; pourtant on trouve déjà son nom en 1482. Son grand-père, également nommé NICOLAAS, était marchand de soieries. Il ressort du livre des bourgeois d'Amsterdam que NICOLAAS avait été immatriculé, comme Amsterdammois de naissance, le 7 octobre 1724. Son père y est nommé »orfèvre« et lui est désigné comme étant »mathesius« ce qui veut dire, sans doute, que le jeune NICOLAAS étudiait les mathématiques. Probablement le père aura été un bourgeois cossu, car les connaissances étendues en matière de sciences naturelles, en même temps que les connaissances dans le domaine des langues classiques et de l'histoire, qui transpirent à chaque page des écrits du fils, prouvent que celui-ci avait reçu une excellente éducation. En bas âge, il montrait déjà des dispositions étonnantes pour les mathématiques, et toutes les sciences qui s'y rattachent. Arrivé à un âge plus avancé, il s'exerçait à donner des leçons de mathématiques; il donnait également des leçons de cosmographie, d'astronomie et de comptabilité. [1]) Il exerçait ces fonctions d'une façon méritoire, jusqu'au moment de sa mort, et pourtant ses études et ses nombreuses occupations doivent lui avoir coûté beaucoup de temps. STRUYCK était célibataire et n'appartenait pas à l'église reformée; il était probablement anabaptiste.

En mourant, à Amsterdam, le 15 mai 1769, il laissa, comme il ressort du régistre de succession entre collatéraux d'Amsterdam p. 249, entre autres, à des arrière-neveux, 4 maisons ayant ensemble une valeur de florins 21,200.

Il jouissait donc alors d'une certaine aisance, du moins pour cette époque. Comme il était membre de la Société Royale de Londres et de l'Académie Royale de Paris, et qu'il était en correspondance avec un grand nombre de personnages célèbres en Angleterre, en France et en Allemagne, nous pouvons présumer qu'il a fait de temps en temps des voyages, quoique nous n'en trouvions aucune mention, ni dans ses écrits, ni ailleurs. Nous relevons parmi ses correspondants les noms du professeur G. DE L'ISLE, de Paris, du professeur S. KOENIG, de Franeker,

[1]) Feu MR. N. DE ROEVER, archiviste de la commune d'Amsterdam, a eu l'obligeance de me montrer, à titre de curiosité, une note écrite et acquittée par N. STRUYCK en 1735. Il réclame un cachet de 5 florins pour un mois de leçons de comptabilité, 9 sous pour la chandelle, les plumes et l'encre, et 6 sous pour le feu.

de M. Klinkenberg, de M. Bouguer, de l'abbé de la Caille, du professeur L. Euler, de E. C. Kindermans, de de la Condamine, de Cassini de Thury, de Cromwell, de Mortimer, etc. Il fit des observations en commun avec le docteur M. Houttuin.

De son vivant, il paraît avoir joui d'une grande réputation. Montucla dit que ses oeuvres géographiques auraient été sans doute accueillies avec joie et reconnaissance par les astronomes, si elles n'avaient pas été écrites dans une langue aussi peu connue que le hollandais. Nicolaas Duyn l'appelle: „le chercheur si exact en ces sortes d'affaires (la mortalité) en même temps que dans d'autres sciences utiles", le docteur A. Gallas l'appelle „le fameux sieur Struyck", tandis que Collot d'Escury mentionne „ses grands mérites et sa grande célébrité"; il y ajoute l'observation: „qu'on l'a toujours cru un des promoteurs de la science appelée „autrefois arithmétique politique, qu'on nomme de nos jours économie „politique et statistique; cependant il ne faudrait pas méconnaître les „mérites de Willem Kersseboom, dans son essai d'arithmétique politique." L'animosité qui régnait entre Kersseboom et Struyck date déja de 1727; elle est la conséquence de quelques articles de peu de valeur, parus dans „le Courrier de la Paix".

Les ouvrages de Struyck sont mentionnés e. a. dans les publications suivantes.

Astronomie de J. de Lalande (trad. holl. 1773, t. I p. 233).

Cométographie ou Traité historique des Comètes, par A. G. Pingré. 1783—84, t. I p. VI, t. II p. 141—149 et ailleurs.

Bibliographie astronomique par J. de Lalande, Paris, 1803, p. 412 et 450 [1]).

Album der Natuur, par le prof. F. Kaiser, 1856, p. 346.

Bibliographie générale de l'astronomie par J. C. Houzeau et A. Lancaster, Bruxelles, 1882, p. 688, 1229 et 1240.

Bibliographisch-Literarisches Handwörterbuch, von J. C. Poggendorff, t. II, p. 1039.

On peut voir aussi, quelle était la place occupée par Struyck dans l'opinion de ses contemporains, en lisant dans le journal de Bengt Ferrner le récit d'un voyage fait en Hollande en 1759; ce récit a été communiqué par G. W. Kernkamp et se trouve dans les Communications de la Société historique („Bijdragen en Medeelingen van het Historisch Genootschap") d'Utrecht, t. 31, p. 356—361, Amsterdam, Joh. Muller, 1910.

Le premier ouvrage de Struyck que je connaisse date de l'année 1716. Il est intitulé: „Uytreekening der Kansen in het speelen, door de Arith- „metica en Algebra, beneevens eene Verhandeling van Looterijen en Interest, „door N. S." [Calcul des chances au jeu, au moyen de l'arithmétique et de l'algèbre; auquel est ajouté un traité des loteries et des intérêts, par

1) De Lalande dit à la p. 450: „Nous lui devons les calculs exacts d'un grand nombre d'orbites cométaires... Ses ouvrages mériteraient d'être traduits."

N. S. 1)]. Chez la veuve PAUL MARRET, Beursstraat, près de la place du Dam MDCCXVI. — La traduction française de cet ouvrage qui est composé de trois parties occupe les 164 premières pages de ce livre.

STRUYCK nous apprend qu'il a fait imprimer en 1733, à Amsterdam, un traité intitulé „La véritable méthode pour trouver le pair dans le „change par la valeur intrinsèque des Espèces d'Or et d'Argent", qui avait plus de 600 pages. Je n'ai jamais rencontré cet ouvrage; il n'est pas mentionné dans la liste des ouvrages de N. STRUYCK, publiée par le professeur D. BIERENS DE HAAN.

En 1737 parut à Amsterdam un écrit de sa main, intitulé: „Over het „berekenen van de Zon-Eclipsen". [Sur le calcul des éclipses solaires] qu'il annexa aux tables de LA HIRE, par SPINDER.

Les deux ouvrages qui ont le plus contribué à fonder la renommée de STRUYCK, sont: „Inleiding tot de algemeene geographie, benevens eenige „sterrekundige en andere verhandelingen" [Introduction à la géographie générale, à laquelle ont été annexés quelques traités d'astronomie et autres] et „Vervolg van de beschrijving der staartsterren, en nadere ontdekkingen „omtrent den staat van het menschelijk geslagt, uit ondervindingen opge-„maakt, benevens eenige sterrekundige, aardrijkskundige en andere aan-merkingen". [Suite de la description des comètes, et découvertes plus détaillées concernant l'état du genre humain, basées sur des expériences, en même temps que quelques observations astronomiques, géographiques et autres]. Les deux ouvrages ont été publiés à Amsterdam chez ISAAK TIRION, le premier en 1740, le second en 1753.

Les trois derniers traités du premier ouvrage appartiennent à la partie de l'oeuvre qui nous regarde. On en trouve ici la traduction française aux pages 165—249. Quoique l'ouvrage ait été publié en 1740 on trouve à la fin du chapitre »Calcul des rentes viagères« la note suivante: »L'impression a été terminée le 15 Avril de l'année 1738«. La préface est datée le 25 Novembre 1739. STRUYCK y parle comme suit: »En fin de compte, je n'hésite pas à ajouter à cet ouvrage mes Hypothèses sur le genre humain, quelle qu'en puisse être la valeur; je le fais pour encourager d'autres auteurs à examiner ces questions de plus près. Il y a lieu d'espérer qu'à l'avenir on réussira à édifier une bonne théorie sur ce sujet. Je ne m'attarderai pas ici à indiquer l'utilité qu'une telle théorie pourrait avoir; je me contenterai de dire que si l'on a bien construit le tableau de la mortalité, on peut calculer les rentes viagères avec toute l'accuratesse désirable. Pendant l'impression de ce dernier traité, j'ai eu l'occasion de calculer les rentes viagères en me basant sur de nouvelles statistiques; je publie ce calcul dans un *Appendice*. Il est vrai qu'il n'a pas été serré dans un tiroir durant 10 ans suivant le conseil D'HORACE. J'ai cru devoir l'ajouter à mon traité parce que je me flattais d'y être

1) Pour se convaincre du fait que les lettres N. S. signifient NICOLAS STRUYCK on peut consulter la page 403 (Note) de cette traduction.

allé un peu plus loin que mes prédécesseurs. Voilà ce que j'avais à dire sur cet ouvrage. Servez-vous en à bonne fin et portez-vous bien.«

Le deuxième ouvrage parut en 1753. Il contient deux traités paginés séparément, dont le dernier seul nous intéresse. On trouve la traduction de ce traité qui se compose de 6 parties aux pages 250—423 de notre livre.

En 1768 parurent encore de la main de STRUYCK les traités suivants: »Inleyding tot het Koopmans-Boekhouden« et »Instructie van het Italiaansch Boekhouden van ABRAHAM DE GRAAF« [»Introduction à la comptabilité« et »Méthode d'enseigner la comptabilité en partie double d'ABRAHAM DE GRAAF».]

J'ai réfléchi longtemps à la question de savoir s'il fallait comprendre dans cette traduction tout ce que STRUYCK a écrit sur l'état du genre humain, mais lorsque je me disais que telle ou telle partie pourrait être omise il me semblait que je faisais tort à l'auteur. S'il entre en tant de détails au sujet de son oeuvre statistique, c'est pour faire voir à ses lecteurs que ses conclusions générales sont bien fondées; dans la traduction les dénombrements ne pouvaient donc être laissés de côté. Nous nous sommes contentés d'abréger quelque peu les détails des recensements de plusieurs villages hollandais: on trouve leurs noms dans la note de la page 260. Ces recensements omis sont parfaitement analogues à ceux que nous avons conservés. Les statistiques de STRUYCK qui se rapportent à des villes et à des pays étrangers ne sont pas denuées d'importance, surtout à cause des critiques qu'il y rattache.

J'espère que les lecteurs de l'ouvrage seront d'accord avec moi pour dire que la SOCIÉTÉ GÉNÉRALE NÉERLANDAISE D'ASSURANCES SUR LA VIE ET DE RENTES VIAGÈRES s'est acquittée courtoisement d'un devoir national en rendant mieux connue qu'elle ne l'était jusqu'ici l'oeuvre de STRUYCK en tant qu'elle se rapporte à notre profession. Il est évident que son travail ne possède aujourd'hui qu'une valeur historique; mais celui qui veut comprendre son époque est obligé de s'intéresser plus ou moins à l'histoire, à laquelle d'ailleurs nos travaux actuels appartiendront aussi. En tenant compte encore des contributions que STRUYCK, outre les traités qui nous intéressent, a apportées à la connaissance de la géographie et de l'astronomie, on devra reconnaître qu'il a véritablement droit au nom honorifique d'un ornement de la science de son siècle.

Je termine en disant que la Direction de la SOCIÉTÉ GÉNÉRALE NÉERLANDAISE D'ASSURANCES SUR LA VIE ET DE RENTES VIAGÈRES m'a chargé de déclarer ici qu'en offrant ce livre aux hommes de profession, membres du Septième Congrès International d'Actuaires elle exprime le souhait qu'il soit pour eux un souvenir agréable autant que durable des jours qu'ils auront passés à Amsterdam.

Bussum, Août 1912. DR. S. R. J. VAN SCHEVICHAVEN.

CALCUL DES CHANCES AU JEU, AU MOYEN DE L'ARITHMÉTIQUE ET DE L'ALGÈBRE, AUQUEL EST AJOUTÉ UN TRAITÉ DES LOTERIES ET DES INTÉRÊTS, PAR N. S.

Au Lecteur.

Le Calcul des Chances n'a pas été connu aux anciens: Monsieur CHRISTIAN HUYGENS est à-peu-près le premier qui ait écrit sur ce sujet. Son traité est de l'année 1657: traduit en hollandais il se trouve dans les „Exercices mathématiques" du professeur VAN SCHOOTEN 1). Aucun progrès notable n'a été accompli dans le calcul des chances avant l'année 1708. En cette année on a imprimé à Paris un „Essay d'Analyse sur les jeux de Hasard", où l'Auteur 2) essaye de continuer ces calculs, comme nous aussi de notre côté avons tâché de le faire.

Il n'est pas nécessaire de prouver l'utilité et l'avantage que ces calculs nous procurent. Nous n'oserions d'ailleurs leur attribuer une valeur aussi haute que celle que M. JACQUES BERNOULLI 3) veut bien leur attribuer: nous préférons nous en tenir aux paroles dont M. HUYGENS que nous venons de nommer se sert dans sa lettre 4) au professeur VAN SCHOOTEN »si quelqu'un approfondit un peu ces choses, je veux bien croire qu'il trouvera qu'il ne s'agissait pas d'un simple jeu, mais de principes et de fondements d'une spéculation intéressante et profonde. Aussi je crois que mes problèmes touchant cette matière, ne seront pas, considérés comme plus faciles

1) „Eerste Bouck der mathematische Oeffeningen" par FR. VAN SCHOOTEN. 1660. p. 489-500. Le titre du traité de HUYGENS est „Van rekeningh in spelen van geluck" (Du calcul dans les jeux de hasard). On trouve la traduction française de ce traité dans „*Mémoirez* pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas, réunis et publiés par la Direction de la Société Générale Néerlandaise d'assurances snr la vie et de rentes viagères". 1898 pg. 44—56. (Note du traducteur).

2) L'auteur de cet Essai anonyme est P. RÉMOND DE MONTMORT. (N. d. tr.).

3) J. BERNOULLI écrivit un traité sur l'art de faire des conjectures („Ars conjectandi"), qui fut publié après sa mort par N. BERNOULLI en 1713. Ce traité est composé de quatre parties, dont la première n'est autre chose que le traité de HUYGENS (texte latin) avec des notes de J. BERNOULLI. (N. d. tr.).

4) Cette lettre est imprimée en hollandais dans les „Exercices" de v. SCHOOTEN, en latin dans le traité de J. BERNOULLI, en français dan les „*Memoires*" pg. 43 et 44. (N. d. tr.).

que ceux de Diophante, mais peut-être plus divertissants, parce qu'ils contiennent autre chose que les simples propriétés des nombres.«

Il est vrai que quelques personnes s'imaginent qu'il est impossible de faire un calcul des chances du jeu et que tout n'y dépend que du hasard. Mais l'expérience fait voir qu'avec deux dés ordinaires on jettera plus souvent sept que douze points et la même chose peut se tirer du calcul des chances, attendu qu'il y a six cas qui donnent sept points et un seul qui en donne douze. D'autres vont encore plus loin par superstition, et croient que la veine ou la déveine dépend des personnes, des temps et des lieux.

Nous nous servirons de l'hypothèse suivante qui ne nous paraît pas déraisonnable: l'ensemble des mises doit être partagé en raison des chances que chacun a de gagner la partie. Car s'il y a deux joueurs A et B, ayant l'un et l'autre la même chance de gagner un certain jeu, quelle raison pourrait-on inventer qui nous porterait à croire que A triomphera plutôt que B? Il n'y en a évidemment aucune non plus pour soutenir le contraire. Par conséquent, s'ils ne veulent pas que le résultat dépende du hasard, en d'autres termes s'ils veulent partager, il est clair que chacun doit avoir la moitié.

Nous traitons d'abord du calcul des chances au moyen de l'arithmétique, en partant de principes élémentaires. En effet, nous avons développé et prouvé tout ce qui pourrait donner lieu a une difficulté quelconque; il suffit donc pour comprendre cela de connaître les règles ordinaires.

Nous avons fait de même dans le calcul des chances au moyen de l'algèbre, ne laissant rien d'inexpliqué si ce n'est ce qui est fort aisé à comprendre, excepté peut-être le dernier Problème. Nous avons en général omis le développement des Exemples, vu que la méthode est toujours la même; car lorsqu'on possède la formule algébrique, il est aisé de remplacer les lettres par des nombres. Quant au cinquième et au sixième Exemple du deuxième [1]) Problème, il faut chercher ce que nous en disons à la dernière page du ,,Calcul des loteries et des intérêts".

Dans le traité des loteries et des intérêts, on remarquera combien l'algèbre accourcit souvent les calculs qui sans elle sont à-peu-près impossibles à cause de leur fastidieuse longueur.

1) Lisez: premier. (N. d. tr.).

CALCUL DES CHANCES AU MOYEN DE L'ARITHMÉTIQUE.

Premier Problème.

Lorsqu'on a quelques chances de gagner un certain nombre de florins, et quelques autres de ne rien gagner ou de perdre de l'argent, quelle est la valeur moyenne de chaque chance?

Premier Exemple.

Lorsque quelqu'un a 5 chances de gagner 10 florins et 11 chances d'en gagner 2, on demande la valeur moyenne de chaque chance. Rép. $4\frac{1}{2}$ florins.

On peut considérer ce cas comme une loterie où il y a 5 prix de 10 florins. La valeur de ces prix est donc de 50 florins, et la valeur des 11 autres prix est de 22 florins, de sorte que les 16 lots ensemble ont une valeur de 72 florins: en divisant les 72 fl. par 16, on trouve pour la valeur de chaque lot la somme de $4\frac{1}{2}$ florins.

Deuxième Exemple.

Quelqu'un tire au hasard un billet d'un sac qui contient 3 billets de 25 florins, 2 de 10 florins et 20 billets sans valeur. On demande la valeur d'un tirage.

Chances.	Florins.
3 — 25	75
2 — 10	20
20 — 0	0

95
divisé par 25 } Rép. 3 florins 16 sous. 1)

Troisième Exemple.

Quelqu'un a 3 chances de gagner 20 florins et 5 chances d'en perdre 10; on demande ce qu'il faudra lui donner, s'il consent à laisser passer son tour. Rép. $1\frac{1}{4}$ flor.

Chances.	Florins.
3 — 20	60 gain
5 — 10	50 perte
8	

10
8 } Rép. $1\frac{1}{4}$ fl.

1) 1 florin = 20 sous. N. d. tr.

Quatrième Exemple.

Lorsqu'on a 6 chances de gagner 12 florins, 10 chances de ne rien gagner, et 20 de perdre 9 florins, quelle est la perte moyenne? Rép. 3 flor.

Chances.		Florins.	
6 — 12		72 gain	
10 — 0		0	soustraction.
20 — 9		180 perte	
36		108 / 36	Rép. perte de 3 fl.

Deuxième Problème.

On demande de combien de manières il est possible de grouper un certain nombre de lettres ou de pièces de monnaie, de sorte que l'ordre dans lequel elles se suivent soit différent pour chaque position.

Supposons que nous ayons 3 lettres. Il est possible de les grouper de $1 \times 2 \times 3$, c'est-à-dire de 6 manières, comme ci-dessous,

a b c	b a c
a c b	c a b
b c a	c b a

Quatre lettres peuvent être groupées de $1 \times 2 \times 3 \times 4$ ou de 24 manières, et 5 lettres de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ ou de 120 manières, et ainsi de suite, (ce signe $\times$ signifie: multiplié par); il faut prendre d'une progression arithmétique qui commence par l'unité et dont la raison est égale à l'unité, autant de termes que l'on a de lettres ou de pièces de monnaie; tous ces termes doivent être multipliés l'un par l'autre; on obtiendra ainsi le résultat désiré.

On trouve par là, en ajoutant les logarithmes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 52, de combien de manières environ 52 cartes peuvent être groupées, de sorte que l'ordre dans lequel elles se suivent soit chaque fois un autre. Le nombre qui correspond à la somme de tous ces logarithmes est 8065 et 64 autres chiffres. Ce nombre est beaucoup plus grand que le produit de mille milliards par le nombre de grains de sable de grandeur ordinaire qu'une sphère creuse grande comme la terre pourrait contenir. Cela paraît incroyable, et cependant il est facile d'en donner la preuve.

Troisième Problème.

Si l'on a quelques pièces de monnaie ou quelques cartes, on demande de combien de manières différentes il est possible d'en prendre un nombre donné.

Premier Exemple.

Supposons que l'on possède 12 pièces de monnaie de formes différentes ou 12 cartes, et qu'on demande de combien de manières on en pourrait prendre 3, de sorte qu'on n'eût jamais les mêmes. Pour résoudre ce problème on écrit une progression arithmétique, dont le premier terme est égal au nombre des pièces de monnaie ou des cartes, et dont la raison est — 1 ; le nombre des termes doit être égal à celui des pièces de monnaie ou des cartes qu'on en veut prendre. En-dessous de cette progression arithmétique on en écrit une seconde qui possède autant de termes, qui commence par 1 et dont la raison est + 1. On divise les termes de la première progression par ceux de la seconde (ce qui ne donne jamais de fractions), on multiplie l'un par l'autre les nombres qui restent, et le produit est le nombre demandé.

2
4
12 — 11 — 10
1 — 2 — 3

11
10
110
2

220 . On peut donc prendre trois cartes de 220 façons.

La raison de cette règle n'est pas difficile à apercevoir. Supposons que l'on ait 5 objets différents, a b c d et e. Il est évident qu'on peut en prendre un seul de 5 manières differentes. Pour savoir alors de combien de manières on peut en prendre 2, de sorte que la suite de ces deux nombres soit chaque fois différente, il faut remarquer que a peut être pris avec chacun des 4 nombres suivants ; et comme la même chose est vraie pour b, c, d, e, il s'ensuit que les combinaisons demandées sont au nombre de 5 4 ou de 20, comme on le voit ci-dessous.

a b	b a	c a	d a	e a
a c	b c	c b	d b	e b
a d	b d	c d	d c	e c
a e	b e	c e	d e	e d.

Si l'on veut voir ensuite de combien de manières 5 lettres peuvent être combinées 3 à 3, de sorte que l'ordre des termes soit chaque fois différent, il faut placer encore une lettre derrière les autres. Or, il est certain que, quelles que soient les deux lettres écrites d'abord, on a encore le choix, pour en ajouter une, entre les trois lettres restantes. Les 5 lettres peuvent être combinées deux-à-deux, comme nous l'avons démontré, de 5×4 ou de 20 manières, les combinaisons demandées de trois lettres sont donc au nombre de $5 \times 4 \times 3$; et en continuant à raisonner de la même manière, on verra que les 5 lettres peuvent être combinées 4 à 4 (l'ordre des termes étant chaque fois différent) de $5 \times 4 \times 3 \times 2$ ou de 120 manières, et 5 à 5 de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ou de 120 manières également. On voit donc que la formule du deuxième Problème est démontrée.

Voyons maintenant de combien de manières on peut de 12 lettres en prendre 3 de sorte qu'on n'ait jamais les trois mêmes lettres. On conclut de la formule du Problème précédent que 12 lettres peuvent être combinées 3 à 3 de $12 \times 11 \times 10$ ou de 1320 manières, l'ordre étant chaque fois différent; mais dans ces combinaisons beaucoup contiennent les mêmes lettres. On trouve par le deuxième Problème que 3 lettres peuvent $1 \times 2 \times 3$ ou six fois être placées l'une à côté de l'autre dans un ordre différent, si on les prend toutes les trois. Les lettres a b c par exemple sont comprises dans les $12 \times 11 \times 10$ ou 1320 combinaisons de toutes les manières dont il est question dans le deuxième Problème; et comme la même chose est vraie pour chacune des trois lettres qu'on tire des douze lettres données, il s'ensuit que les combinaisons demandées sont au nombre de $12 \times 11 \times 10$ ou 1320 divisé par $1 \times 2 \times 3$ ou 6, c. à d. au nombre de 220. De ce qui a été dit résulte la règle que nous venons d'énoncer.

Deuxième Exemple.

On demande quelle est la probabilité, étant données 40 cartes, d'en tirer 3 cartes désignées d'avance.

$$\begin{array}{ccccc} & & 13 & & 19 \\ 40 & — & 39 & — & 38 \\ 1 & — & 2 & — & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \underline{13} \\ 520 \\ \underline{19} \\ 9880 \end{array}$$

On peut de toutes les cartes en prendre trois de 9880 manières différentes. Or, il n'y a parmi tous ces cas qu'un seul cas favorable. On a donc 9879 chances de perdre et une chance de gagner.

Troisième Exemple.

On demande la chance de gagner d'une personne qui parie de deviner l'une après l'autre les trois cartes qu'elle tire d'un jeu de 40 cartes.

Supposons que cette personne ait déjà deviné deux cartes l'une après l'autre. Restent alors encore 38 cartes et elle a une chance contre 37 d'en tirer celle qu'elle nomme. Elle a donc droit à $\frac{1}{38}$ de l'enjeu. Mais avant de prendre la deuxième carte, elle n'a droit qu'à $\frac{1}{39}$ de ce $\frac{1}{38}$, c. à. d. à $\frac{1}{1482}$ de l'enjeu, et avant de commencer à $\frac{1}{40}$ de $\frac{1}{1482}$, de sorte que sa part de l'enjeu est alors $\frac{1}{59280}$, le reste de l'unité appartenant à son adversaire.

Mais si l'on veut se servir de la méthode que nous avons suivie dans le premier et dans le second Exemple appartenant à ce Problème, il suffit de multiplier l'un par l'autre les nombres 40, 39 et 38, ce qui donne 59280 pour toutes les manières dont 40 cartes peuvent être combinées 3 à 3, l'ordre étant différent dans chaque cas. Parmi ces cas il n'y en a qu'un favorable au parieur, et 59279 qui lui sont contraires.

Quatrième Exemple.

On demande la chance de gagner d'une personne qui parie de tirer du jeu nommé cinq cartes de même couleur (ou ,,Lanterlu'').

$$\begin{array}{ccccc} & 13 & & & \\ 40 - & 39 - & 38 - & 37 - & 36 \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 \end{array}$$

En multipliant l'un par l'autre les nombres qui restent, on trouvera 658008 pour le nombre des combinaisons des 40 cartes 5 à 5.

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & 2 \\ 10 - & 9 - & 8 - & 7 - & 6 \\ 1 - & 2 - & 3 - & 4 - & 5 \end{array}$$

En opérant sur ces nombres comme ci-dessus, on trouve que

l'on peut tirer 5 cartes d'une même couleur de 252 manières; et et en multipliant ce nombre par 4, vu qu'il y a quatre espèces de cartes, on trouve 1008, ce qui représente le nombre de cas favorables au parieur.

Nombre total des chances 658008
1008
Nombre des cas défavorables 657000 contre 1008 cas favorables.
72 ou 9125 contre 14, ce qui est la probabilité demandée.

Cinquième Exemple.

On demande la chance de gagner d'une personne, qui tire 9 cartes d'un jeu de 36 cartes, et qui veut parier d'avoir les quatre as.

Il faut calculer d'abord de combien de manières on peut combiner toutes les cartes 9 à 9, et ensuite les 32 cartes qui restent 5 à 5.

```
    2                11                      4
B  36 — 35 — 34 — 33 — 32 — 31 — 30 — 29 — 28
    1 —  2 —  3 —  4 —  5 —  6 —  7 —  8 —  9

                    7
A  32 — 31 — 30 — 29 — 28
    1 —  2 —  3 —  4 —  5
```

On a alors 5 17

$$\frac{2.\ 35.\ 34.\ 11.\ 31.\ 29.\ 4}{32.\ 31.\ 29.\ 7}$$

16
4
2

5
17
85
11
935 nombre total des chances
2
933 cas défavorables contre 2 cas favorables.

En considérant comme numérateur ce qui a été nommé A, et comme dénominateur l'expression B, on voit clairement que 1, 2, 3, 4, 5, ainsi que 32, 31, 30, 29, 28, se détruisent, et comme cela a lieu dans tous les cas, on a la règle suivante qui est plus simple que la précédente.

Formez une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont chacun le produit d'un certain nombre de termes constituant une progression arithmétique, dont la raison est — 1. Dans l'un et l'autre le nombre des termes doit être égal à celui des cartes qu'on espère trouver parmi celles qu'on tire du jeu, donc ici à 4. Le premier terme du numérateur doit être égal au nombre des cartes

que l'on tire du jeu, c'est-à-dire à 9 dans le cas considéré. Le premier terme du dénominateur doit être égal au nombre de toutes les cartes.

$$\frac{9 \cdot \overset{4}{8} \cdot 7 \cdot \overset{2}{6}}{36 \cdot \underset{5}{35} \cdot \underset{17}{34} \cdot \underset{11}{33}} \text{ ou } \frac{2}{935}, \text{ c. à. d. } \frac{933}{935} \text{ pour la chance de l'adversaire.}$$

Quatrième Problème.

On demande le nombre de coups différents qu'on peut faire avec un nombre donné de dés.

Par „coups différents" nous entendons ici non pas seulement les coups qui donnent des nombres différents de points: nous voulons considérer toutes les diverses manières dont les côtés des dés peuvent être combinés entre eux.

D'abord, de deux dés ordinaires que nous nommerons A et B, le 1, le 2, le 3, le 4, le 5 et le 6 de A peuvent chacun être jetés en même temps que le 1 de B, de la même manière le 1, le 2, le 3, le 4, le 5, et le 6 de A peuvent se combiner avec le 2 de B, etc. On trouve donc en tout 36 coups; de même 216 coups pour trois dés, et 1296 coups pour 4 dés, d'où l'on tire la règle générale, quel que soit le nombre donné de dés, et quel que soit celui de leurs côtés. Pour trouver tous les coups différents, le nombre des côtés du dé doit être multiplié par lui-même un nombre de fois égal à celui des dés. C'est ainsi qu'on obtient le nombre demandé.

On m'a demandé s'il n'est pas également probable de jeter du premier coup 9 six avec 9 dés ordinaires, ou de tirer aveuglément d'un sac qui contient 54 boules, à savoir 9 marquées 6, 9 marquées 5, 9 marquées 4, 9 marquées 3, 9 marquées 2 et 9 marquées 1, d'en tirer, dis-je, du premier coup les 9 boules marquées 6. A première vue les deux cas paraissent à-peu-près identiques, mais en réalité il est plus de 500 fois plus facile de jeter du premier coup les 9 six, que de tirer du sac les 9 boules marquées 6. Car le nombre de coups possibles avec les neuf dés est 6^9 ou 10077696, et par le Problème précédent on trouve que les combinaisons de 54 boules 9 à 9 sont au nombre de 5317936260, de sorte qu'il y a 1 chance contre 10077695 de jeter du premier coup les neuf 6: mais la probabilité de tirer les 9 boules du sac est 1 : 5317936259. On aperçoit nettement la raison qui fait que les dés peuvent être

combinés entre eux d'un moindre nombre de manières: le 1 du premier dé ne peut être jeté en même temps que le 2, le 3, le 4, le 5 ou le 6 du même dé, mais les boules peuvent être combinées entre elles de toutes les manières.

Cinquième Problème.

On demande de combien de manières on peut avec un nombre donné de dés jeter des nombres donnés de faces pareilles, à savoir les unes une fois, les autres deux fois, d'autres encore trois fois, etc., soit qu'on détermine d'avance quelles seront les faces qui se présenteront le nombre donné de fois, soit qu'on laisse cela indéterminé; et quelle est la chance d'une personne qui parie de jeter du premier coup les nombres donnés de faces pareilles.

Premier Exemple.

Supposons qu'on ait 9 dés ordinaires et qu'on parie de jeter tout-de-suite 3 six, 2 cinqs, 1 quatre, 1 trois, 1 deux et 1 as; il faut donc examiner de combien de manières on peut des 9 six prendre les 3 six demandés. A l'aide du troisième Problème on trouve que cela peut se faire de 84 façons. Restent alors encore 6 dés. Considérant de combien de façons on peut des 6 cinqs qui s'y trouvent en obtenir 2, on trouve que cela peut se faire de 15 manières. Après cela on a encore 4 dés; on peut avec eux obtenir un quatre de 4 façons. Avec les trois dés qui restent on peut jeter un 3 de 3 manières; ensuite avec les 2 dés qui restent un 2 de deux manières; et enfin le dernier dé ne peut donner le résultat demandé que d'une seule manière. Le nombre total des coups possibles avec les 9 dés est d'après le troisième Problème 6^9 ou 10077696. La partie de l'enjeu auquel la personne qui a parié a droit est donc

$$\frac{84 \times 15 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6^9} \text{ ou } \frac{30240}{10077696} \text{ ou } \frac{35}{11664}.$$

Le numérateur de la deuxième fraction donne le nombre des manières différentes dont on peut jeter les nombres de points proposés.

Deuxième Exemple.

Mais si l'on s'était proposé de jeter avec 9 dés, sans rien spécifier, 3 nombres de points égaux entre eux, deux autres

nombres égaux entre eux, et quatre autres nombres différents l'un de l'autre, on voit clairement que le nombre 84 qui figure dans l'Exemple précédent, doit encore être multiplié par 6, parce que 3 nombres égaux peuvent être obtenus en jetant trois as, trois deux, etc. jusqu' à trois six ; et quel que soit le nombre de points qu'on obtient ainsi trois fois, on a encore, pour le nombre de points qu'il faut obtenir deux fois, le choix entre les 5 autres nombres que les 6 dés restants peuvent donner ; c'est pourquoi le nombre 15 doit être multiplié par 5. Quant aux nombres inégaux, ils ne peuvent pas être variés comme les nombres doubles ou triples ; car soit qu'on parie de jeter 4, 3, 2, 1, soit qu'on veuille obtenir les nombres 5, 6, 1, 2 etc. avec 4 dés, cela revient au même, de sorte que les chances de gagner que l'on a alors sont au nombre de $84 \times 6 \times 15 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ou de 907200. La part de la personne qui a parié est donc alors $\frac{175}{1944}$.

On voit aisément comment on peut construire d'après la méthode précédente des tables où l'on peut trouver le nombre de tous les coups possibles, tant pour le cas où les nombres de points qu'il faut jeter sont déterminés que pour celui où ces nombres sont indéterminés. Voici ces tables pour 2 dés, etc. jusqu' à 9 dés.

Pour 2 dés.

	Coups déterminés.	Indéterminés.
1. Pour avoir deux nombres inégaux ..	2	30
2. Pour avoir deux nombres égaux	1	6

Pour 3 dés.

1. Pour avoir trois nombres inégaux ...	6	120
2. Pour avoir deux nombres égaux et un nombre différent	3	90
3. Pour avoir trois nombres égaux	1	6

Pour 4 dés.

1. Pour avoir 4 nombres inégaux......	24	360
2. Pour avoir 2 nombres égaux et 2 nombres inégaux................	12	720
3. Pour avoir 3 nombres égaux et un nombre différent	4	120

	Coups déterminés	Indéterminés.
4. Pour avoir deux fois deux nombres égaux	6	90
5. Pour avoir quatre nombres égaux ...	1	6

Pour 5 dés.

1. Pour avoir 5 nombres inégaux......	120	720
2. Pour avoir 2 nombres égaux et 3 nombres inégaux................	60	3600
3. Pour avoir 2 fois 2 nombres égaux, et un nombre différent	30	1800
4. Pour avoir 3 nombres égaux et deux nombres inégaux................	20	1200
5. Pour avoir 3 nombres égaux et deux autres nombres égaux	10	300
6. Pour avoir 4 nombres égaux et un nombre différent	5	150
7. Pour avoir 5 nombres égaux	1	6

Pour 6 dés.

1. Pour avoir six nombres inégaux	720	720
2. Pour avoir 2 nombres égaux et 4 nombres inégaux................	360	10800
3. Pour avoir 2 fois 2 nombres égaux et 2 nombres inégaux	180	10200
4. Pour avoir 3 fois 2 nombres égaux .	90	1800
5. Pour avoir 3 nombres égaux, 2 autres nombres égaux et un nombre différent	60	7200
6. Pour avoir 3 nombres égaux et 3 nombres inégaux..........	120	7200
7. Pour avoir 2 fois 3 nombres égaux .	20	300
8. Pour avoir 4 nombres égaux et 2 nombres inégaux................	30	1800
9. Pour avoir 4 nombres égaux et 2 autres nombres égaux	15	450
10. Pour avoir 5 nombres égaux et 1 nombre différent	10	180
11. Pour avoir 6 nombres égaux	1	6

Pour 7 dés.

	Coups déterminés.	Indéterminés.
1. Pour avoir 2 nombres égaux et 5 nombres inégaux................	2520	15120
2. Pour avoir 2 fois 2 nombres égaux, et 3 nombres inégaux...........	1260	75600
3. Pour avoir 3 fois 2 nombres égaux, et un nombre différent..........	630	37800
4. Pour avoir 3 nombres égaux et 4 nombres inégaux................	840	25200
5. Pour avoir 3 nombres égaux, 2 autres nombres égaux, et 2 nombres inégaux	420	75600
6. Pour avoir 3 nombres égaux, et 2 fois 2 nombres égaux...............	210	12600
7. Pour avoir 2 fois 3 nombres égaux, et 1 nombre différent..............	140	8400
8. Pour avoir 4 nombres égaux, et 3 nombres inégaux................	210	12600
9. Pour avoir 4 nombres égaux, 2 autres nombres égaux et 1 nombre différent	105	12600
10. Pour avoir 4 nombres égaux et 3 autres nombres égaux...........	35	1050
11. Pour avoir 5 nombres égaux, et 2 nombres inégaux................	42	2520
12. Pour avoir 5 nombres égaux, et 2 autres nombres égaux...........	21	630
13. Pour avoir 6 nombres égaux et 1 nombre différent................	7	210
14. Pour avoir 7 nombres égaux.......	1	6

Pour 8 dés.

	Coups déterminés.	Indéterminés.
1. Pour avoir 4 nombres inégaux et 2 fois 2 nombres égaux...........	10080	151200
2. Pour avoir 3 fois 2 nombres égaux, et 2 nombres inégaux...........	5040	302400
3. Pour avoir 4 fois 2 nombres égaux.	2520	37800
4. Pour avoir 3 nombres égaux et 5 nombres inégaux................	6720	40320

	Coups déterminés.	Indéterminés.
5. Pour avoir 3 nombres égaux, 2 autres nombres égaux, et 3 nombres inégaux	3360	403200
6. Pour avoir 3 nombres égaux, 2 fois 2 autres nombres égaux, et un nombre différent........................	1680	302400
7. Pour avoir 2 fois 3 nombres égaux, et 2 autres nombres égaux.......	560	33600
8. Pour avoir 2 fois 3 nombres égaux, et 2 nombres inégaux............	1120	100800
9. Pour avoir 4 nombres égaux et 4 nombres inégaux................	1680	50400
10. Pour avoir 4 nombres égaux, 2 autres nombres égaux, et 2 nombres inégaux	840	151200
11. Pour avoir 4 nombres égaux et 2 fois 2 nombres égaux................	420	25200
12. Pour avoir 4 nombres égaux, 3 autres nombres égaux et 1 nombre différent	280	33600
13. Pour avoir 2 fois 4 nombres égaux..	70	1050
14. Pour avoir 5 nombres égaux et 3 nombres inégaux................	336	20160
15. Pour avoir 5 nombres égaux, 2 autres nombres égaux et 1 nombre différent	168	20160
16. Pour avoir 5 nombres égaux, et 3 autres nombres égaux............	56	1680
17. Pour avoir 6 nombres égaux, et 2 nombres inégaux................	56	3360
18. Pour avoir 6 nombres égaux, et 2 autres nombres égaux............	28	840
19. Pour avoir 7 nombres égaux et 1 nombre différent................	8	240
20. Pour avoir 8 nombres égaux.......	1	6

Pour 9 dés.

1. Pour avoir 3 fois 2 nombres égaux, et 3 nombres inégaux...........	45360	907200
2. Pour avoir 4 fois 2 nombres égaux, et 1 nombre différent............	22680	680400

	Coups déterminés.	Indéterminés.
3. Pour avoir 3 nombres égaux, 2 autres nombres égaux, et 4 nombres inégaux	30240	907200
4. Pour avoir 3 nombres égaux, 2 fois 2 nombres égaux, et 2 nombres inégaux	15120	2721600
5. Pour avoir 3 nombres égaux, et 3 fois 2 nombres égaux.	7560	453600
6. Pour avoir 2 fois 3 nombres égaux, et 3 nombres inégaux.............	10080	604800
7. Pour avoir 2 fois 3 nombres égaux, 2 autres nombres égaux, et 1 nombre différent	5040	907200
8. Pour avoir 3 fois 3 nombres égaux..	1680	33600
9. Pour avoir 4 nombres égaux et 5 nombres inégaux................	15120	90720
10. Pour avoir 4 nombres égaux, 2 autres nombres égaux, et 3 nombres inégaux	7560	907200
11. Pour avoir 4 nombres égaux, 2 fois 2 nombres égaux, et 1 nombre différent	3780	680400
12. Pour avoir 4 nombres égaux, 3 autres nombres égaux, et 2 nombres inégaux	2520	453600
13. Pour avoir 4 nombres égaux, 3 nombres égaux et 2 nombres égaux ..	1260	151200
14. Pour avoir 2 fois 4 nombres égaux et 1 nombre différent...........	630	37800
15. Pour avoir 5 nombres égaux et 4 nombres inégaux................	3024	90720
16. Pour avoir 5 nombres égaux, 2 autres nombres égaux et 2 nombres inégaux	1512	272160
17. Pour avoir 5 nombres égaux, et 2 fois 2 nombres égaux............	756	45360
18. Pour avoir 5 nombres égaux, trois autres nombres égaux, et 1 nombre différent.......................	504	60480
19. Pour avoir 5 nombres égaux et 4 autres nombres égaux............	126	3780
20. Pour avoir 6 nombres égaux, et 3 nombres inégaux	504	30240

	Coups déterminés.	Indéterminés.
21. Pour avoir 6 nombres égaux, 2 autres nombres égaux, et 1 nombre différent	252	30240
22. Pour avoir 6 nombres égaux, et 3 autres nombres égaux...........	84	2520
23. Pour avoir 7 nombres égaux, et 2 nombres inégaux................	72	4320
24. Pour avoir 7 nombres égaux, et 2 autres nombres égaux...........	36	1080
25. Pour avoir 8 nombres égaux, et 1 nombre différent................	9	270
26. Pour avoir 9 nombres égaux.......	1	6

Troisième Exemple.

On demande de trouver la chance de gagner d'une personne qui parie de jeter 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec 6 dés ordinaires, pourvu qu'il lui soit permis de retourner un des dés en sa faveur.

Le quatrième Problème fait voir qu'on peut faire 46656 coups avec 6 dés. Parmi ceux-ci il y en a 720 qui peuvent lui donner 1, 2, 3, 4, 5, 6 sans qu'elle retourne un dé ; en effet, d'après ce qui précède, il faut multiplier l'un par l'autre les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, ce qui donne 720. Or il est certain qu'elle gagne aussi si elle ne jette pas plus de 2 nombres égaux. Si nous prenons les 2 six, les autres coups doivent être composés de 1, 2, 3, 4, de 1, 2, 3, 5, de 2, 3, 4, 5, de 1, 3, 4, 5, ou de 1, 2, 4, 5. L'ordre de 4 chiffres peut être changé 24 fois ; c'est donc de 120 manières que l'on peut jeter les mêmes six chaque fois avec d'autres nombres. Il y a 6 six sur les dés ; on peut les combiner 2 à 2 de 15 façons différentes. En multipliant 15 par 120, on trouve 1800 pour le nombre des coups possibles composés de 2 six et de 4 autres nombres inégaux ; et comme la même chose est vrai pour les nombres 1, 2, 3, 4 et 5, il faut multiplier 1800 par 6, ce qui donne 10800. En y ajoutant le nombre 720 obtenu précédemment, on trouve 11520 pour le nombre total des coups qui peuvent faire gagner la personne qui a fait le pari ; en retranchant ce nombre de 46656, on trouve un reste de 35136 chances qui lui sont contraires ; en divisant les deux nombres par 576, on voit qu'elle a 20 chances de gagner contre 61 chances de perdre.

D'après les Tables.

Avec 6 dés on a le nombre de coups suivant:

	Coups.
Pour avoir 6 nombres inégaux (nombres indéterminés)	720
Pour avoir 2 nombres égaux et 4 nombres inégaux (nombres indéterminés)	10800
	11520 comme auparavant.

Sixième Problème.

Étant donné un certain nombre de dés et supposant que nous soyons convenus de payer une certaine somme chaque fois qu'une face déterminée d'un des dés se présente, on demande combien les adversaires devront nous payer à leur tour lorsqu' aucune des faces déterminées ne se présentera, pour que les chances des deux groupes de joueurs soient égales.

Premier Exemple.

Supposons que nous ayons 6 dés ordinaires et que nous soyons convenus de payer un sou à nos adversaires pour chaque coup où entre un six. On demande, combien de sous les adversaires devront pour égaliser les chances nous payer chaque fois qu'aucun six ne se présente.

Avec un dé on peut faire 5 coups où le 6 n'entre pas, on peut en faire 25 avec deux dés, 125 avec 3 dés, 625 avec 4 dés, 3125 avec 5 dés, et 15625 avec 6 dés, comme cela résulte de la solution du quatrième Problème, et de même pour chaque nouveau dé il faut multiplier par 5 le nombre précédent. Or un 6 peut se présenter avec toutes les combinaisons ne contenant pas de 6 que l'on peut avoir avec 5 dés. Et comme ce 6 unique peut être tiré de tous les six de 6 manières, il faut multiplier 3125 par 6, ce qui donne 18750 pour le nombre des coups qui contiennent un seul 6. Pour trouver ensuite le nombre des coups qui contiennent 2 six, il faut considérer de combien de manières on peut des 6 six en prendre 2, ce qui peut se faire de 15 manières. En multipliant ce nombre par 625 ce qui est le nombre des combinaisons ne contenant pas de six que l'on peut avoir avec les 4 dés qui restent, on trouve 9375, qui est donc le nombre

des coups qui donnent 2 six; et en continuant de la même manière on trouvera ce qui suit

6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1
1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6

6 $\frac{5}{2}$ 15 $\frac{4}{3}$ 20 $\frac{3}{4}$ 15 $\frac{2}{5}$ 6 $\frac{1}{6}$ 1

Sans six	Combinaisons des six	Coups				Six
		15625		0		0
3125	6	18750		1		18750
625	15	9375		2		18750
125	20	2500	de	3	six	7500
25	15	375		4		1500
5	6	30		5		150
		1		6		6
		46656				46656 sous.

Il y a 15625 coups qui ne donnent aucun 6, et nous de notre côté devrions payer en tout 46656 sous, de sorte que l'on devra nous rendre à-peu-près trois sous lorsque nous n'aurons jeté aucun 6. Mais pour faire le calcul plus aisément, on peut se servir de la règle suivante.

Multipliez 5 par lui-même un nombre de fois égal à celui des dés. Vous aurez alors le nombre des coups qui ne donnent pas de six. Multipliez 6, c. à d. le nombre des côtés de chaque dé, par lui-même un nombre de fois égal à celui des dés diminué de l'unité. En multipliant alors le résultat par le nombre des dés, on a le nombre total des coups qu'on peut faire avec les dés. 1) En divisant ce produit par le nombre des coups qui ne donnent pas de six, on trouve, en admettant que nous payons un sou pour chaque six, combien de sous nous devrons recevoir lorsque nous n'aurons jeté aucun six.

1) L'auteur veut dire qu'on trouve ainsi le nombre total des six qu'on obtient par tous les coups différents que l'on peut faire avec les dés. (N. d. tr.)

Deuxième Exemple.

À l'aide de l'Exemple précédent on peut aisément résoudre le problème suivant. Monsieur JEAN LAW proposait à quelqu'un de jetér six dés un nombre illimité de fois. Lorsqu'il jetterait 6 six, M. LAW lui donnerait 1000 pistoles en or; mais chaque fois que 4 nombres égaux ou plus de 4 nombres égaux se présenteraient, cette personne lui payerait 2 pistoles. Quel avantage M. LAW y voyait-il?

On voit par ce qui précède qu'on peut faire avec les dés 375 coups de 4 six, 30 coups de 5, et 1 de 6 six, cela fait en tout 406 coups, ce qui, multiplié par 6, donne 2436. Parmi ceux-ci il n'y en a qu'un seul qui fasse gagner les 1000 pistoles, mais il y en a 2435 qui font perdre 2 pistoles, de sorte qui M. LAW aurait un avantage considérable.

Septième Problème.

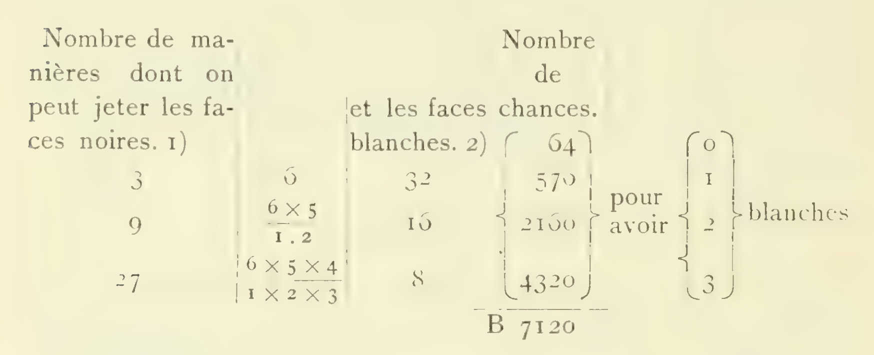
On parie de jeter du premier coup avec un nombre donné de dés qui ont des faces blanches et des faces noires, un nombre de faces blanches au moins égal à un nombre donné. Quelle chance a-t-on de gagner le pari?

Premier Exemple.

Supposons que nous ayons 6 dés, possédant chacun 5 faces, à savoir 3 faces blanches et 2 noires. A parie de jeter du premier coup au moins 4 faces blanches et B de jeter au moins 3 faces noires. Quelles chances ont-ils de gagner leurs paris?

Pour trouver le nombre de coups qui ne donnent aucune face blanche, on peut observer que s'il y avait deux dés, les deux faces noires du premier dé pourraient se présenter ensemble avec chacune des faces noires du deuxième dé, ce qui fait 4 combinaisons de deux noires. On en trouve de même 8 pour 3 dés et 64 pour 6 dés. Pour trouver tous les coups qui donnent une face blanche et les autres noires, il faut avoir égard à ce que le nombre total des combinaisons de cinq faces noires que l'on peut jeter avec 5 dés est 32. En multipliant ce nombre par 6, vu qu'on peut former 6 combinaisons de 6 dés 5 à 5 ou 1 à 1, on obtient 192. Et en multipliant de nouveau par 3, parceq ue la face blanche peut être jetée de 3 manières différentes, on trouvera 576, ce qui représente

le nombre de coups différents qui donnent une blanche et 5 noires. Pour trouver ensuite le nombre de coups qui donnent 2 blanches et 4 noires, il faut remarquer que les deux blanches peuvent être jetées de 9 façons différentes (avec 2 dés) et les 4 noires de 16 façons différentes (avec 4 dés). Or des 6 dés on peut en prendre 2 de 15 manières d'après le troisième Problème. En multipliant ce nombre par 9 et par 16, on trouve 2160, ce qui représente le nombre total des coups qui peuvent donner 2 blanches et 4 noires. De la même manière on fait le calcul pour 3 blanches et 3 noires.



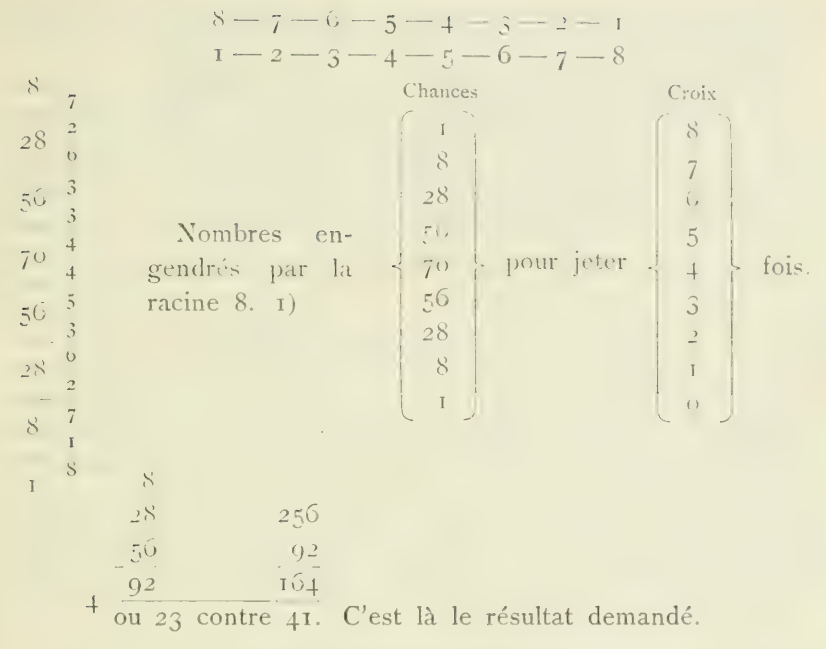
Nombre de manières dont on peut jeter les faces noires. 1)		et les faces blanches. 2)	Nombre de chances.		
			64		0
3	6	32	576	pour avoir	1
9	$\frac{6 \times 5}{1 . 2}$	16	2160		2 blanches
27	$\frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3}$	8	4320		3
			B 7120		

Lorsqu'on ne jette pas plus de 3 blanches, B gagne. Le nombre de coups possibles avec les 6 dés est 5^6 ou 15625. Parmi ceux-ci il y en a 7120 qui font gagner B, et 8505 qui font gagner A. La chance de A est donc à celle de B comme 1701 est à 1424.

Deuxième Exemple.

Il s'ensuit de cette théorie que si quelqu'un possède 8 pièces de monnaie et qu'il veut parier qu'en les jetant il aura croix pas moins de 5 et pas plus de 7 fois, il peut mettre 23 contre 41. Car ce problème est analogue à celui où l'on a des dés ayant deux faces chacun; les 8 pièces de monnaie peuvent donc tomber de 2^8 ou 256 manières, et il n'y a qu'une seule manière dont elles peuvent toutes donner croix et 8 manières dont elles peuvent donner 7 croix et 1 pile. Pour savoir ensuite de combien de façons on peut avoir six croix et 2 piles, il faut examiner de combien de manières on peut de 8 objets en prendre 2, ce qui peut se faire de 28 façons, et en continuant de la sorte on trouvera ce qui suit.

1) Lisez: blanches. (N. d. tr.)   2) Lisez: noires. (N. d. tr.)



ou 23 contre 41. C'est là le résultat demandé.

Mais si l'on prenait un grand nombre de pièces de monnaie, un très-grand travail serait nécessaire pour trouver les génitures correspondantes. Cependant on peut se servir dans ce cas de l'algèbre et des logarithmes. On peut consulter à ce sujet le dernier problème de „l'Art de faire des Conjectures", ou bien la lettre de M. NICOLAS BERNOULLI écrite à l'auteur de „l'Analyse", le 23 Janvier 1713. 2)

Troisième Exemple.

On m'a raconté que quelqu'un avait reçu un florin à condition de payer à son tour 20000 florins, lorsque celui qui jouait Passedix avec lui, aurait gagné 20 fois de suite. Or, il arriva que celui qui avait donné le florin jeta 18 fois l'une après l'autre un nombre supérieur à 10. Son adversaire lui offrit alors 18000 florins, mais il n'accepta pas cet offre avantageux et voulant continuer à tenter la fortune.

1) L'auteur les appelle „génitures de la racine 8". Il entend donc par „génitures de la racine n" les expressions 1, n, $\frac{n(n-1)}{2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ etc. (N. d. tr).

2) Cette lettre est imprimée dans le Recueil de Lettres, publié par M. de Montmort dans la deuxième édition (1713) de son „Essay d'Analyse". (N. d. tr.

il perdit la dix-neuvième fois, de sorte qu'au lieu de recevoir 18000 florins, il dut se contenter de ne rien recevoir.

Si l'on veut calculer combien de chances contre une il y a de jeter 20 fois l'une après l'autre un nombre supérieur à 10 dans le jeu de Passedix, il faut savoir que le Passedix est un jeu où il est également probable de jeter un nombre supérieur à 10 ou un nombre inférieur à 10. C'est donc la même chose que si quelqu'un a une pièce de monnaie et qu'il parie de jeter croix 20 fois l'une après l'autre; et c'est encore la même chose que s'il jette 20 pièces de monnaie, avec la condition qu'il gagnera si elles donnent toutes croix. Nous avons dit plus haut que la somme des génitures d'une racine égale au nombre des pièces de monnaie exprime le nombre de manières différentes dont peuvent tomber ces pièces de monnaie. La somme de toutes les génitures de la racine 20 est 2^{20} ou 1048576. Parmi ce nombre de cas il n'y en a qu'un où l'on jette 20 croix. Il y a donc 1048575 chances contre 1 de jeter 20 fois l'une après l'autre un nombre supérieur à 10, et $2^{18} - 1$ ou 262143 contre 1 d'obtenir un pareil nombre 18 fois l'une après l'autre.

Quatrième Exemple.

On parie de jeter trois fois de suite avec deux dés ordinaires un nombre supérieur à 8. Quelle chance a-t-on de gagner?

Avec 2 dés ordinaires on peut faire 36 coups. Parmi ceux-ci ceux qui donnent plus de 8 points sont les suivants: un coup de 12, deux coups de 11, 3 coups de 10 et 4 coups de 9 points. Si l'on suppose que celui qui fait le pari recevra l'unité s'il vient à gagner, alors, s'il a jeté déjà deux fois un nombre supérieur à 8, il a 10 chances de recevoir l'unité et les 26 autres de ne rien recevoir. Cela a pour lui une valeur de $\frac{5}{18}$. S'il n'a jeté qu'une seule fois un nombre supérieur à 8, il a 10 chances d'avoir $\frac{5}{18}$ et les autres 26 de ne rien avoir. Ceci a pour lui une valeur de $\frac{25}{324}$. De même au moment où il jette la première fois, il a 10 chances d'avoir $\frac{25}{324}$ et les autres 26 de ne rien avoir. Sa part est donc $\frac{125}{5832}$. On voit par là qu'il existe une règle aisée pour trouver la part de celui qui parie de jeter un certain nombre de fois l'une après l'autre un nombre de points supérieur à un nombre donné.

C'est la suivante. Formez une fraction, dont le numérateur indique le nombre de coups possibles avec les dés donnant un nombre supérieur au nombre donné, et le dénominateur le nombre total des coups possibles avec les dés. Multipliez le numérateur et le dénominateur par eux-mêmes autant de fois qu'on a parié de jeter l'une après l'autre un nombre supérieur au nombre donné. Le résultat est la part demandée, de sorte que dans cet Exemple la part de celui qui a fait le pari est $\frac{10^3}{36^3}$ ou $\frac{5^3}{18^3}$ c.à.d. $\frac{125}{5832}$ comme auparavant.

Cinquième Exemple.

Deux personnes A et B jouent un jeu où l'on se propose d'effacer quelques traits. Supposons que A ait 4 traits à effacer et B 3, qu'ils se servent de deux dés ordinaires et que A efface un trait lorsqu'on jette 10 et B lorsqu'on jette 11. Quelle chance de gagner aura chacun d'eux?

Cet Exemple ne diffère pas du premier Exemple de ce Problème, car il y a 3 chances de jeter le nombre 10, et 2 chances de jeter le nombre 11. Les conditions ne changent pas si, au lieu de jeter avec 2 dés, on jette avec un seul dé ayant 5 faces, 3 blanches et 2 noires, et que A efface un trait lorsqu'on jette une face blanche et B lorsqu'on jette une face noire; on voit que, dans ce dernier cas, le jeu sera terminé en 6 coups tout au plus, vu qu'alors 6 traits seront déjà effacés. En prenant 6 dés à 5 faces, on peut terminer le jeu tout-de-suite sans nuire aux intérêts de personne, à condition que A gagne lorsque plus de trois faces blanches se présenteront, et B lorsqu'on jettera plus de deux noires, ce qui est la même chose. Car lorsqu'il y a 4 blanches, A gagne; et en ce cas, B ne peut gagner, vu que le nombre des noires ne peut être supérieur à 2. La solution de la question et d'autres questions analogues est donc la même que dans le premier Exemple appartenant au Problème considéré. Mais nous développerons ceci encore d'une autre façon, savoir par la

Règle.

Pour trouver la part de A, construisez une progression géométrique qui commence par l'unité, dont la raison est la somme des chances, et le nombre des termes égal au nombre des traits du joueur B. Multipliez celle-ci par une deuxième progression géométrique qui commence également par l'unité et dont la raison est

la chance qu'a le joueur B de pouvoir effacer un trait. Il faut multiplier le premier terme de la première progression par le dernier terme de la deuxième, etc. Nous donnons aux produits le nom de multiplicateurs. Construisez alors une progression arithmétique qui commence par le nombre des traits de A, divisez-la par une progression arithmétique contenant le même nombre de termes, commençant par l'unité et dont la raison est 1. Le nombre des termes de ces deux progressions doit être égal à celui des traits de B moins un. Multipliez tous ces quotients l'un par l'autre, et après avoir multiplié chacun des produits ainsi obtenus 1) avec un des multiplicateurs susdits, pris en ordre inverse, ajoutez ces produits et multipliez cette somme par le nombre des chances de A, ce nombre étant multiplié par lui-même un nombre de fois égal à celui des traits de A. Vous aurez alors le résultat demandé.

Si l'on substitue B à A dans la règle précédente, on trouve la part de B. On peut aussi agir comme suit: multipliez la somme des chances par elle-même un nombre de fois égal à la somme des traits de A et de B diminuée de l'unité. Retranchez-en les chances de A, vous aurez alors celles de B.

1 × 4 { 4
5 × 2 { 10
25   1 { 25

1   $\frac{4}{1}$ — 25 { 25
4   $\frac{5}{2}$ — 10 { 40
10   — 4 { 40

4—5
1—2

105
Multiplié par 3^4 ou 81
A 8505
Le nombre total des chances est 5^6 ou 15625 soustraction
B 7120

Sixième Exemple.

Lorsque le problème est le même que précédemment, excepté en ce que A peut effacer un trait lorsqu'on jette 8 points et B lorsqu'on en jette 6, de sorte que les chances des deux joueurs sont égales, on opère comme suit

1) Comme on le voit par l'exemple numérique, il faut multiplier le premier quotient par l'unité, et regarder l'unité comme le premier des produits obtenus par la multiplication successive des quotients (N. d. tr.)

1 — 4 4

— $\frac{4}{1}$

4 — 2 8

— $\frac{5}{2}$

10 — 1 10

A 22

Nombre total des chances 2^6 ou 64

B 42

C.à.d. la chance de A est à celle de B comme 11 est à 21. C'est là le résultat demandé.

Septième Exemple.

Cet Exemple est tiré de l',,Analyse'', nouvelle impression, p. 260. A et B désirent l'un et l'autre occuper un poste dont on disposera par majorité de voix. Douze personnes ont le droit de voter. A sait que parmi ces 12 personnes il y en a 3 qui voteront pour lui, et 2 qui voteront pour B; et qu'il a la même chance que B d'obtenir les 7 voix qui restent. Au temps où l'élection aura lieu on vient dire à A que 3 des 12 personnes qui doivent voter sont tombées malades et ne viendront pas, sans dire toutefois si parmi les malades se trouvent des électeurs qu'il savait être disposés à voter pour lui ou des électeurs appartenant au groupe des 7, dont il peut espérer avec autant de raison que B qu'ils voteront pour lui. Tout ceci étant posé, on demande quelle est la chance de A d'obtenir le poste. On trouvera aisément par ce qui précède que l'espoir qu'il a d'être élu est égal à 109:67, ce qui est un peu plus de 3 : 2. On pourrait aussi demander quelle serait la chance de A, si parmi les malades il s'en trouvait un qui aurait voté pour B, ou si A trouvait moyen de faire changer d'avis quelques-uns de ceux qui avaient l'intention de voter pour B. Dans ce dernier cas on pourrait demander combien d'argent il peut raisonnablement dépenser à cet effet, étant donnée la valeur du poste.

Huitième Problème.

Si l'on a un nombre donné de dés et qu'on parie de ne pas dépasser, du premier coup, un nombre donné de points, quelle chance aura-t-on de gagner le pari?

Premier Exemple.

A a 6 dés ordinaires, et veut parier avec B qu'il jettera du premier coup un nombre inférieur à 18. On demande quelle chance il a de gagner le pari. On peut aisément résoudre ce problème par la formule algébrique, mais nous suivrons ici une autre voie. Nous supposerons qu'on jette deux dés trois fois l'une après l'autre: la somme totale des points devra être inférieure à 18 pour que A gagne le pari. Au cas où les deux premiers dés donnent 2 points, le reste peut être comme suit:

Les points obtenus du deuxième coup.	Chances correspondantes.	La part de A, lorsque l'enjeu est 1.	
2	1	1	1
3	2	1	2
4	3	$\frac{35}{36}$	$2\frac{11}{12}$
5	4	$\frac{11}{12}$	$3\frac{2}{3}$
6	5	$\frac{5}{6}$	$4\frac{1}{6}$
7	6	$\frac{13}{18}$	$4\frac{1}{3}$
8	5	$\frac{7}{12}$	$2\frac{11}{12}$
9	4	$\frac{5}{12}$	$1\frac{2}{3}$
10	3	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{6}$
11	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
12	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

En ajoutant les derniers nombres on trouve $23\frac{11}{12}$, et en divisant par 36 on obtient $\frac{287}{432}$, ce qui est la part à laquelle A a droit si du premier coup il jette 2 points avec les 2 dés. De même, lorsqu'il jette 3 points du premier coup, on obtient $\frac{771}{1296}$, lorsqu'il jette 4 points, $\frac{575}{1296}$, 5 points $\frac{145}{432}$, 6 points $\frac{155}{648}$, 7 points $\frac{103}{648}$, 8 points $\frac{7}{72}$, 9 points $\frac{35}{648}$, 10 points $\frac{35}{1296}$, 11 points $\frac{5}{432}$, et 12 points $\frac{5}{1296}$. Ces fractions ont été trouvées de la manière indiquée ci-dessus; les dernières sont plus aisées à trouver que les premières.

Pour faire voir cela, nous développerons ici le calcul de la chance qu'il a lorsqu'il jette 12 points du premier coup.

Deuxième coup.	Chances.	La part de A.
2	1	$\frac{1}{12}$ / $\frac{1}{12}$
3	2	$\frac{1}{36}$ / $\frac{1}{18}$
Etc. jusqu'à 12	3 etc.	0

En ajoutant $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{18}$, on trouve $\frac{5}{36}$, et en divisant cela par 36, $\frac{5}{1296}$, comme plus haut. Opérez alors comme suit:

La première fois.	Chances.				Parts.
2	1	multiplié par	$\frac{287}{432}$	il vient	$\frac{287}{432}$
3	2		$\frac{721}{1296}$		$\frac{721}{648}$
4	3		$\frac{575}{1296}$		$\frac{575}{432}$
5	4		$\frac{145}{432}$		$\frac{145}{108}$
6	5		$\frac{155}{648}$		$\frac{775}{648}$
7	6		$\frac{103}{648}$		$\frac{103}{108}$
8	5		$\frac{7}{72}$		$\frac{35}{72}$
9	4		$\frac{35}{648}$		$\frac{35}{162}$
10	3		$\frac{35}{1296}$		$\frac{35}{432}$
11	2		$\frac{5}{432}$		$\frac{5}{216}$
12	1		$\frac{5}{1296}$		$\frac{5}{1296}$

En ajoutant les 12 derniers nombres ou trouvera $\frac{9604}{1296}$ ou $\frac{2401}{324}$. En divisant ce nombre par la somme de tous les coups possibles avec 2 dés, savoir par 36, on obtiendra $\frac{2401}{11664}$; c'est la part de A. Et si l'on veut savoir combien de coups différents de 6 à 17 points inclusivement peuvent être faits avec 6 dés ordinaires, il faut multiplier la part de A par 46656, ce qui est le nombre

total des coups possibles avec 6 dés ordinaires. Il viendra 9604, ce qui est le nombre cherché.

Neuvième Problème.

Si l'on a un nombre donné de dés ou de cartes et si nous parions de jeter un nombre de points déterminé ou de tirer du jeu quelques cartes determinées, on demande combien de fois nous devrons pouvoir jeter les dés ou tirer un certain nombre de cartes, pour que nous puissions parier un nombre donné contre 1.

Règle.

Cherchez le logarithme du nombre de tous les cas qui peuvent se présenter lorsqu'on jette une fois les dés ou qu'on tire une fois le nombre donné de cartes. Retranchez-en le logarithme du nombre des cas défavorables correspondants. Ajoutez ensuite à 1 le nombre que nous voulons parier contre 1 ; cherchez le logarithme de cette somme et divisez-le par le reste susdit. Vous trouverez ainsi le nombre demandé de coups ou de traits.

Premier Exemple.

On demande en combien de coups l'on pourrait parier 1 contre 1 de jeter 2 six avec 2 dés ordinaires.

Le logarithme de 6 est	$7781512\frac{1}{2}$
" " " 36 "	15563025
" " " 35 "	15440680
Reste	122345

Le logarithme de 2 est 3010300. En divisant ce nombre par 122345, ou trouvera un nombre de coups un peu inférieur à 25.

Deuxième Exemple.

On pose la même question qu'au premier Exemple, avec cette différence que cette fois on veut parier 10 contre 1. Ajoutez 10 à 1, il vient 11. Le logarithme de ce nombre est 10413927. Divisez-le par 122345, nombre qui a été trouvé précédemment : il vient un nombre de coups un peu supérieur à 85, ce qui est le résultat désiré. Et si l'on veut parier 1000 contre 1 on trouvera 245 coups, ou 100 contre 1, à-peu-près 146 coups.

Troisième Exemple.

Si quelqu'un veut d'un jeu de 36 cartes en tirer 9 et qu'il veut parier 3 contre 500 que parmi ces 9 cartes se trouveront les quatre as, on demande combien de traits il devra pouvoir faire, pour que les deux partis jouent avec des chances égales autant que possible.

Dans le 5ième Exemple appartenant an 3ième Problème nous avons trouvé qu'il y a 2 chances d'avoir tout de suite les 4 as et 933 de ne pas les avoir. Si l'on met 3 contre 500, cela revient à mettre $\frac{3}{500}$ contre 1.

933
2
935 le logarithme est 29708116
933 ,, ,, ,, 29698816
9300

1
$\frac{3}{500}$
$1 \frac{3}{500}$
503 le logarithme est 27015680
500 ,, ,, ,, 26989700
25980
Divisé per 9300 ———
3 coups à-peu-près ce qui est le résultat demandé.

Dixième Problème.

On demande les conditions de perte et de gain de celui qui jette les dés dans le jeu nommé ,,Cinquenove'', étant décidé qu'on cessera lorsque le jeu aura été gagné ou perdu une fois.

Les principales conditions de ce jeu sont les suivantes. Les deux joueurs font une mise et l'on jette les dés pour savoir qui jettera le premier. Supposons que ce soit A. S'il jette 5 ou 9 il perd le jeu et alors c'est le tour de B de jeter les dés. Mais s'il jette 3 ou 11 ou un nombre double il gagne le jeu et s'approprie la mise de B qui fait une nouvelle mise; et A continue à jouer. Si A ne fait aucun des coups dont nous avons parlé, il n'a ni gagné ni perdu; mais s'il jette 7, 6, 8, 4 ou 10 points sans nombres doubles, il ne peut gagner à moins qu'il ne jette immédiatement le même nombre de points qu'il vient de jeter: car

s'il obtient des nombres de points identiques par deux coups successifs, il gagne le jeu tout aussi bien que lorsqu'il jette d'un seul coup deux nombres égaux.

La mise de chacun étant 1, l'enjeu total est 2.

Chance	Chance	Chance
6 — 2 ⎧ 12	5 — 2 ⎧ 10	3 — 2 ⎧ 6
8 — 0 ⎩ 0	8 — 0 ⎩ 0	8 — 0 ⎩ 0
14 $\quad \frac{12}{14}$	13 $\quad \frac{10}{13}$	11 $\quad \frac{6}{11}$
$\frac{6}{7}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{6}{11}$
lorsque A jette 7 du premier coup	lorsqu'il jette 6 ou 8 points du premier coup	lorsqu'il jette 4 ou 10 points du premier coup

On a 10 chances de gagner le jeu du premier coup, savoir 2 chances de jeter 11, 2 chances de jeter 3 et 6 chances de jeter un nombre double.

	Chances	
Pour jeter 3, 11 ou un nombre double	10 — 2	⎧ 20
„ „ 7 points	6 — $\frac{6}{7}$	$5\frac{1}{7}$
„ „ 6 ou 8 sans nombre double	8 — $\frac{10}{13}$	⎨ $6\frac{2}{13}$
„ „ 4 ou 10 „ „ „	4 — $\frac{6}{11}$	$2\frac{2}{11}$
„ „ 5 ou 9	8 — 0	⎩ 0
	36	$33\frac{479}{1001}$

$$\frac{33\frac{479}{1001}}{36} = \frac{8378}{9009}.$$ C'est là la part du joueur. Il a fait une mise égale à l'unité, sa perte est donc $\frac{631}{9009}$, c'est-à-dire environ 7 %. Mais si l'on demande quelle est en tout la perte de A jusqu'au moment où il perd un jeu (car alors c'est le tour du deuxième joueur de jeter les dés), il suffit de prendre la somme des termes d'une progression géométrique infinie, dont le premier terme est $\frac{631}{9009}$ et la raison égale à la moitié de la part de A, c. à d. à $\frac{4189}{9009}$. La somme de tous ces termes est $\frac{631}{4820}$. C'est là le nombre demandé qui indique la perte du joueur A.

Onzième Problème.

Quelqu'un a un nombre donné de cartes. On a décidé quels seront les atouts. Il veut parier qu'après un nombre donné de changements, il aura un nombre donné d'atouts. Quelle sera sa chance?

Premier Exemple.

Trois personnes A, B et C jouent „scharwenselen" avec 36 cartes. C donne les cartes. Après que l'atout a été tourné, A seul regarde ses cartes. Il ne possède pas un seul atout. S'il parie qu'après 2 changements (au cas où il a la main) il aura 5 atouts, quelle sera sa chance de gagner ce pari? De même s'il parie d'avoir 4 atouts, ni plus ni moins? Ou s'il parie d'avoir 3 atouts, 2 atouts, 1 atout ou aucun atout? 1)

Deuxième Exemple.

Lorsqu'on a 40 cartes, 10 de chaque couleur, et qu'on veut jouer „scharwenselen", on demande — l'atout ayant été tourné — combien de changements il faudrait faire pour avoir 5 atouts. 2)

Douzième Problème.

On demande, lorsqu'on joue aux cartes avec d'autres personnes et qu'on a reçu quelques cartes déterminées, de calculer s'il y a avantage à jouer ou à passer.

Premier Exemple.

Trois personnes jouent „scharwenselen" avec 40 cartes. C donne les cartes et tourne un atout de couleur basse. A a en main le Roi et la Dame de l'atout. On demande si A, lorsqu'il a la main, peut avec avantage échanger ses cartes, ou bien s'il doit passer. Si l'on ne faisait pas quelques hypothèses et si l'on ne se résignait pas à négliger diverses circonstances, le problème serait singulièrement difficile et long à résoudre. 2)

1) Comme les règles du jeu „scharwenselen" en allemand „scharwenzeln" ne nous sont pas connues, nous avons cru devoir omettre les calculs de STRUYCK relatifs à ce jeu. Nous avons conservé cependant le premier et le sixième Exemple du Dixième Problème du Calcul des Chances au moyen de l'Algèbre. (N. d. tr.)

2) Voir la note précédente (N. d. tr.)

On voit clairement qu'on pourrait tirer des Problèmes qui précèdent une foule d'Exemples outre ceux que nous avons nommés mais parce que la solution de chacun d'eux est suffisamment évidente par analogie avec celle des Exemples précédents, nous nous contenterons de faire suivre ici la solution des **5 Problèmes** qui M. CHRISTIAN HUYGENS a jadis proposés aux amateurs. 1)

I. A et B jouent l'un contre l'autre avec 2 dés, aux conditions suivantes. A sera vainqueur s'il jette 6 points, et B s'il en jette 7. A fera le premier coup. Après lui B en fera deux de suite, ensuite A en fera deux, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un ou l'autre aura gagné. On demande le rapport des chances de gagner que A en B ont respectivement. Réponse: 10355 : 12276.

A a 5 changes de gagner, B en a 6. On peut faire 36 coups différents avec 2 dés ordinaires. Nous calculerons d'abord la valeur du premier coup de A, et ensuite celle des coups doubles que les joueurs font tour à tour.

Chances

5 — 1 ⎫ 5
31 — 0 ⎭ 0

36 | 5
36

Le premier coup de A $\frac{5}{36}$

1 —

Reste $\frac{31}{36}$

Chances

6 — $\frac{31}{36}$ ⎫ 31
⎬ 6
30 — 0 ⎭ 0

36 | $\frac{31}{6}$
36

Le premier coup de B $\frac{31}{216}$

$\frac{31}{16}$

Reste $\frac{155}{216}$

1) Ces cinq Problemes sont proposés par Huygens à la fin du traité sur le „Calcul dans les jeux de hasard". J. BERNOULLI les résout dans son „Ars conjectandi", et P. R. DE MONTMORT en donne également la solution dans son „Essay d'Analyse", 4ième partie. (N. d. tr.)

Chances

6 — $\frac{155}{216}$ { $\frac{155}{36}$

30 — 0 { 0

36 $\frac{155}{36}$

36

Le second coup de B $\frac{155}{1296}$

$\frac{155}{216}$

Reste $\frac{775}{1296}$

Chances

5 — $\frac{775}{1296}$ { $\frac{3875}{1296}$

31 — 0 { 0

36 $\frac{3875}{1296}$

36

Le premier coup de A $\frac{3875}{46656}$

$\frac{775}{1296}$

Reste $\frac{24025}{46656}$

Chances

5 — $\frac{24025}{46656}$ { $\frac{120125}{46665}$

31 — 0 { 0

36 $\frac{120125}{46656}$

36

Le second coup de A $\frac{120125}{1679616}$

Le premier coup de A $\frac{3875}{46656}$

Pour deux coups de A $\frac{259625}{1679616}$

Le premier coup de B $\frac{31}{216}$

Le second coup de B $\frac{155}{1296}$

Les 2 coups de B $\frac{341}{1296}$

Et comme les nombres qui correspondent aux 2 coups que B et A font l'un après l'autre conservent entre eux la même proportion jusqu'à l'infini, et qui est donc égale à la proportion des sommes des nombres correspondant aux deux premiers coups que les joueurs font l'un après l'autre, il faut diviser $\frac{31}{36}$, la partie de l'enjeu qui reste pour les deux joueurs après le premier coup de A, en raison de ces sommes, ce qui se fait de la manière suivante. En divisant, pour abréger le calcul, les numérateurs par 31 et les dénominateurs par 1296, on voit que ces sommes sont l'une à

l'autre comme 11 est à $\frac{8375}{1296}$. La somme de ces nombres est $\frac{22631}{1296}$.

$$\frac{22631}{1296} \text{ — B } 11 \text{ — } \frac{31}{36} \left\{ \text{la part de B sera } \frac{12276}{22631}. \right.$$

Si nous soustrayons ce nombre de l'unité, il reste $\frac{10355}{22631}$; c'est la part de A. La chance de gagner du joueur A est donc à celle de B comme 10355 est à 12276. Ce qu'il fallait trouver.

II. Trois joueurs A, B et C prennent 12 fiches, dont 4 blanches et 8 noires. Ils jouent aux conditions suivantes: Celui d'entre eux qui aura le premier tiré une fiche blanche sera vainqueur. A tirera le premier, puis B, ensuite C, ensuite de nouveau A, et ainsi de suite à tour de rôle. On demande les rapports des chances des trois joueurs.

On peut entendre cette proposition de deux manières. En premier lieu, on peut admettre que chaque fiche noire qu'on a tirée est rendue et ajoutée à celles qui restent, de sorte que chacun peut tirer une fiche d'entre toutes celles qui ont été données. En second lieu on peut admettre que les fiches noires qu'on a tirées ne sont pas rendues. Dans ce dernier cas on voit au neuvième coup au plus tard qui gagne le jeu, tandisque dans le premier cas le jeu peut durer jusqu'à l'infini. D'abord nous ferons la première supposition, ensuite la seconde.

A	$4 - 1$	$\left\{ 4 \right.$	$4 - \frac{2}{3}$	$\left\{ 2\frac{2}{3} \right.$	$4 - \frac{4}{9}$	$\left\{ \frac{16}{9} \right.$
	$8 - 0$	0	$8 - 0$	0	$8 - 0$	0
	12	4	12	$2\frac{2}{3}$	12	$\frac{16}{9}$
	12		12		12	
	A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{2}{9}$	C	$\frac{4}{27}$
		1		$\frac{2}{3}$		
	Reste	$\frac{2}{3}$	Reste	$\frac{4}{9}$		

Les chances de A, de B et de C garderont entre elles la même proportion depuis les 3 premiers coups jusqu'à l'infini. Il suffit donc de prendre les chances déjà calculées et de leur donner le même dénominateur.

$A\ \frac{1}{3}$ —— $B\ \frac{2}{9}$ —— $C\ \frac{4}{27}$
$A\ 9$ —— $B\ 6$ —— $C\ 4.$ 27 C'est à ces nombres que leurs chances sont proportionnelles.

Une solution analogue peut être donnée du problème suivant. A, B, C et D possèdent quelques pièces de monnaie. C'est le tour de A de les jeter : toutes celles qui présentent croix sont pour lui. B jette celles qui restent ; il prend celles qui présentent croix. C, puis D, font de même. A jette de nouveau toutes celles qui restent et prend celles qui présentent croix, B fait la même chose avec celles qui restent alors, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elles ont toutes été gagnées. Quelle sera la chance de chaque joueur ?

Vu que chacun gagne la moitié des pièces de monnaie qu'il jette, les parties dont les chances des joueurs se composent sont les suivantes.

Au premier tour $A\ \frac{1}{2}$, $B\ \frac{1}{4}$, $C\ \frac{1}{8}$, $D\ \frac{1}{16}$.

Au second tour $A\ \frac{1}{32}$; $B\ \frac{1}{64}$, $C\ \frac{1}{128}$, $D\ \frac{1}{256}$.

Au troisième tour $A\ \frac{1}{512}$ etc.

Comme ces parties conservent entre elles la même proportion jusqu'à l'infini, on voit clairement que pour trouver la part de chacun, il suffit de diviser l'unité en 4 parties, ayant entre elles les mêmes rapports que les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, etc. Cela se fait de la manière suivante :

$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{4}$	$A\ \frac{1}{2}$	$A\ \frac{8}{15}$	
$\frac{1}{8}$	$B\ \frac{1}{4}$	$B\ \frac{4}{15}$	Ce sont là les nombres demandés.
$\frac{1}{16}$	$C\ \frac{1}{8}$	$C\ \frac{2}{15}$	
$\frac{15}{16}$	$D\ \frac{1}{16}$	$D\ \frac{1}{15}$	

Mais ceux qui connaissent l'algèbre, pourraient trouver la solution de la manière suivante. Supposons que le nombre des joueurs soit

s et que le nombre r indique le rang du joueur dont on cherche la part, alors la valeur du premier coup est pour lui $\frac{1}{2^r}$, la valeur du deuxième coup $\frac{1}{2^{r+s}}$ et ainsi de suite suivant une progression géométrique jusqu'à l'infini. Pour en trouver la somme, portez le premier terme $\frac{1}{2^r}$ au carré ce qui donne $\frac{1}{2^{2r}}$. Divisez ce carré par la différence de $\frac{1}{2^r}$ et de $\frac{1}{2^{r+s}}$, c.à.d. par $\frac{2^s - 1}{2^{r+s}}$. Il viendra pour la somme de la progression, donc pour la part d'un joueur quelconque $\frac{2^{s-r}}{2^s - 1}$.

Lorsqu'on a $s = 4$ et $r = 2$, on trouve pour la part du deuxième joueur $\frac{4}{15}$. Cette même formule peut être déduite de notre tormule qui se trouve dans le „Calcul des Chances par l'Algèbre" un peu avant le premier Exemple, appartenant au troisième Problème; car si l'on y pose $a = 1$, $b = 1$ et $p = 2$, on obtient la formule précédente.

Pour résoudre le Problème dans la seconde hypothèse nous opérons comme suit:

	Chances		Chances		Chances	
A	$4 - 1$	4	$4 - \frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$4 - \frac{14}{33}$	$1\frac{23}{33}$
	$8 - 0$	0	$7 - 0$	0	$6 - 0$	0
	12	4	11	$2\frac{2}{3}$	10	$1\frac{23}{33}$
		12 ——		11 ——		10 ——
		A $\frac{1}{3}$		B $\frac{8}{33}$		C $\frac{28}{165}$
		1		$\frac{2}{3}$		
		Reste $\frac{2}{3}$		Reste $\frac{14}{33}$		

Et en continuant de la même manière on trouvera ce qui suit:

Au premier tour	A $\frac{1}{3}$,	B $\frac{8}{33}$,	C $\frac{28}{165}$,
Au deuxième tour	$\frac{56}{495}$	$\frac{7}{99}$	$\frac{4}{99}$,
Au troisième tour	$\frac{2}{99}$	$\frac{4}{495}$	$\frac{1}{495}$,
	A $\frac{7}{15}$,	B $\frac{53}{165}$,	C $\frac{7}{33}$

165

A 77, B 53, C 35. Voilà les nombres qui font connaître les proportions des chances entre elles.

Mais nous avons résolu le même Problème d'une autre façon encore, par la théorie des combinaisons. Cette solution est la suivante :

Il est certain que le premier coup a pour A la valeur $\frac{1}{3}$. Si l'on considère ensuite de combien de manières 12 objets peuvent être pris 2 à 2, on trouvera le nombre 66. Pour trouver ensuite la somme des valeurs du premier coup de A et du premier coup de B, il faut calculer de combien de façons ils peuvent tirer deux fiches noires, c. à. d. de combien de façons 8 fiches noires peuvent être prises 2 à 2. On trouve que cela peut avoir lieu de 28 façons. Retranchez ce nombre de 66 ; il reste 38. Ils ont donc droit à $\frac{38}{66}$ ou $\frac{19}{33}$ de l'enjeu. De cette part A doit avoir $\frac{1}{3}$; il reste donc pour B $\frac{8}{33}$. Cherchez de même la valeur totale du coup de A, de B et de C, comme suit :

2
4
12 — 11 — 10
1 — 2 — 3

8 — 7 — 6
1 — 2 — 3

11
2
22
10
220 nombre total des chances
$8 \times 7 =$ 56 nombre des chances défavorables
164 nombre des chances favorables.

Alors la valeur du coup de A, de B et de C est $\frac{164}{220}$ ou $\frac{41}{55}$

Celle du coup de A et de B est $\frac{19}{33}$

Reste pour C $\frac{28}{165}$.

Et en continuant de la même manière on trouvera les parts de chaque joueur comme auparavant.

On voit aisément comment on peut à l'aide de cette proposition trouver par l'arithmétique l'avantage du banquier dans le jeu nommé ,,Pharaon'' 1): les 52 cartes constituent le nombre total des fiches, et tout se passe comme si 2 personnes seulement tiraient. Les cartes sur lesquelles on hasarde tiennent lieu des fiches blanches. La seule difficulté du problème consiste dans la peine qu'il faut prendre pour faire le calcul numérique.

III. A parie avec B que de 40 cartes, dont 10 de chaque couleur, il en tirera 4 de telle manière qu'il en aura une de chaque couleur. On trouvera ici que la chance de A est à celle de B comme 1000 est à 8139.

A peut des 10 coeurs tirer une carte de 10 manières différentes; de même pour les carreaux, les trèfles et les piques. C'est pourquoi le nombre des chances favorables au joueur A est 10^4. Cherchez ensuite de combien de manières on peut de 40 cartes en prendre 4, sans avoir jamais les mêmes.

10 13 19		
40 — 39 — 38 — 37	37	10
1 — 2 — 3 — 4	19 mult.	10
	703	100
	13	10
	9139	1000
	10	10
Nombre total des chances	91390	10000 nombre des chances favorables à A.
	10000	

La chance de B est à celle de A comme 8139 est à 1000.

On peut arriver au même résultat en calculant la part qui revient au joueur après qu'il a tiré une ou plusieurs cartes.

1 Voir p. 104. On trouve aussi les règles du Pharaon dans l',,Essay d'Analyse'', 2ième partie. (N. d. tr.

Supposons que le joueur tire les cartes l'une après l'autre. Il faut considérer que si A avait déjà tiré trois cartes différentes, il devrait des 37 cartes restantes en tirer encore une différente des trois premières. Il y en a alors encore 10 qui font gagner A, et 27 qui font gagner B. L'enjeu étant 1, A a droit à $\frac{10}{37}$. Si A a déjà pris 2 cartes, par exemple un carreau et un coeur, il y a en tout encore 38 cartes, parmi lesquelles 10 trèfles et 10 piques. S'il tire une de ces deux dernières couleurs, il sera dans le cas précédent, c. à d. il aura droit à $\frac{10}{37}$. Il a donc 20 chances d'obtenir $\frac{10}{37}$ et 18 chances de ne rien obtenir. Sa part est donc alors d'après la solution du premier Problème $\frac{100}{703}$. Si A avait tiré un carreau la première fois, il resterait encore 39 cartes, parmi lesquelles il n'y aurait que 9 carreaux qui pourraient lui faire perdre. Il aurait donc 30 chances d'obtenir $\frac{100}{307}$ et 9 chances de ne rien obtenir. Sa part est alors $\frac{1000}{9139}$ et comme il ne peut prendre une fausse carte la première fois, c'est là aussi sa part au commencement du jeu. Celle de B sera donc $\frac{8139}{9139}$. Les chances des deux joueurs ont entre elles le rapport 1000 : 8139, ce qui s'accorde avec le résultat du calcul précédent.

IV. Ayant prix 12 fiches, dont 4 blanches et 8 noires, A parie avec B d'en tirer au hasard 7 fiches dont 3 blanches: on demande le rapport de la chance de A à celle de B.

Cherchez d'abord de combien de manières on peut de 12 fiches en prendre 7, ensuite de combien de manières on peut prendre les 8 fiches noires 4 à 4 et les 4 blanches 3 à 3.

3 2	2	
12 — 11 — 10 — 9 — 8 — 7 — 6	8 — 7 — 6 — 5	4 — 3 — 2
1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7	1 — 2 — 3 — 4	1 — 2 — 3
11	7	4
9	2	70
99	14	280 chances
8	5	de prendre 3
792 manières différentes de prendre 7 fiches	70	blanches et 4 noires.

Retranchez 280 de 792. Il reste 512. La chance de A est alors à celle de B comme 280 est à 512, ou comme 35 est à 64, dans l'hypothèse que A ne doit avoir ni plus ni moins de 3 blanches parmi les 7 fiches. Mais comme on pourrait également interpréter l'énoncé du problème en ce sens que A gagnerait son pari si parmi les 7 fiches il en tirait plus de 3 blanches, aussi bien que lorsqu'il en tire 3, il faut calculer de combien de façons on peut prendre 8 fiches 3 à 3: les 4 fiches blanches ne pouvant être prises que d'une seule manière.

8 — 7 — 6	
1 — 2 — 3	792
il vient 56	336
280	456
336	

La chance de A sera à celle de B comme 336 est à 456 ou comme 42 est à 57. C'est là le résultat demandé.

V. Ayant pris 12 pièces de monnaie chacun, A et B jouent avec 3 dés à cette condition que lorsqu'on jette 11 points, A doit donner une pièce de monnaie à B, mais lorsqu'on en jette 14, B doit donner une pièce de monnaie à A, et que celui-là sera vainqueur qui sera le premier en possession de toutes les pièces de monnaie. On doit trouver que la chance de A est à celle de B comme 244140625 est à 282429536481.

Avec trois dés on peut faire 27 coups qui donnent 11 et 15 coups qui donnent 14 points. Le rapport de ces nombres est égal à 9 : 5. Supposons que lorsque B a une pièce de monnaie, et A toutes les autres, B ait encore droit à une partie de l'enjeu égale à 1 florin. La valeur totale de ses chances est alors de 14 florins. 1)

Parmi ces chances il y en a 5 qui lui donnent zéro, les 9 autres qui lui donnent 2 pièces de monnaie valent donc ensemble 14 florins. La valeur de chaque chance est donc de $1\frac{5}{9}$ fl. C'est là la part de B lorsqu'il a deux pièces de monnaie. Pour calculer, en partant de là, quelle est sa part lorsqu'il a 3 pièces de monnaie, nous remarquons, comme auparavant, qu'il y a en tout 14 chances,

1) On peut se figurer qu'au lieu d'un joueur B, il y en a 14. Parmi ceux-ci il y en aura 5 en moyenne qui perdront une pièce de monnaie et 9 qui en gagneront une. (N. d. tr.)

ayant une valeur moyenne de $1\frac{5}{9}$ fl., ce qui fait en tout $21\frac{7}{9}$ florins. Parmi celles-ci il y a 5 chances pour lui de posséder une pièce de monnaie ; sa part est alors de 1 florin ; ce qui fait 5 florins pour les 5 chances. Si nous retranchons ce nombre de $21\frac{7}{9}$, il reste $16\frac{7}{9}$ pour les 9 autres chances, ce qui fait $1\frac{70}{81}$ fl. pour chacune d'elles. C'est là la part de B lorsqu'il a 3 pièces de monnaie. On trouve de la même manière la part de B lorsqu'il a 4 pièces de monnaie, par le calcul suivant :

Toutes les chances $14 - 1\frac{70}{81}$ } fl. $26\frac{8}{81}$

$5 - 1\frac{5}{9}$ } $7\frac{7}{9}$

9 $18\frac{26}{81}$ } fl. $2\frac{26}{729}$, lorsque B a 4

divisé par 9 } pièces de monnaie.

En continuant de la même manière on doit chercher la part de B lorsqu'il a 12 pièces de monnaie, et ensuite sa part lorsqu'il a 24 ou bien toutes les pièces de monnaie. En prenant le premier de ces nombres pour numérateur et le dernier pour dénominateur d'une fraction, et en simplifiant cette fraction, on trouve la part cherchée de B.

1 pièce	2 pièces	3 pièces	4 pièces
1 fl.	$1\frac{5}{9}$ fl.	$1\frac{70}{81}$ fl.	$2\frac{26}{729}$
	1	$1\frac{5}{9}$	$1\frac{70}{81}$
	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{125}{729}$

Mais si l'on remarque que la part à laquelle B a droit augmente chaque fois qu'il gagne une pièce de monnaie, de telle manière que les nombres qui représentent ces accroissements forment une progression géométrique, on voit qu'il suffit de prendre la somme des termes d'une progression géométrique, dont le nombre de termes est égal à celui des pièces de monnaie de B, qui commence par l'unité et dont la raison est $\frac{5}{9}$. Cette somme est le numérateur. Pour trouver le dénominateur, on prend la somme d'un nombre de termes de cette même progression égal à la somme des nombres de pièces de monnaie de A et de B. Or, pour chercher la somme d'un certain nombre

de termes de cette progression, il faut prendre le premier terme, c.à.d. 1, en retrancher le terme qui suit le dernier, c.à.d. $\frac{5^{12}}{9^{12}}$ dans le numérateur et $\frac{5^{24}}{9^{24}}$ dans le dénominateur, et diviser le reste par l'unité diminuée de la raison. On trouve ainsi les sommes demandées. Mais comme la division doit être effectuée dans le numérateur aussi bien que dans le dénominateur, on peut l'omettre. La part qui revient à B est alors

$$\frac{\text{Numérateur} \quad 1 - \frac{5^{12}}{9^{12}}}{\text{Dénominateur} \quad 1 - \frac{5^{24}}{9^{24}}}$$

Or, il est certain que le produit de la somme et de la différence de deux nombres est égal au carré du plus grand nombre diminué du carré du plus petit. Car en multipliant la somme des deux nombres par le plus grand seulement, on trouverait pour résultat la somme du carré du plus grand nombre et du produit des deux nombres; et en multipliant cette somme par le plus petit nombre, on trouve le même résultat, mais cette fois avec le carré du plus petit nombre. En soustrayant ces deux produits l'un de l'autre, on obtient un reste égal à la différence des deux carrés. Dans la fraction considérée le numérateur est la différence de 2 nombres, et le dénominateur la différence de leurs carrés. Il s'ensuit que si l'on divise le dénominateur par le numérateur, on trouve l'unité dans le numérateur et la somme des nombres dans le dénominateur ; la part de B est donc

$$\frac{1}{1 + \frac{5^{12}}{9^{12}}},$$

ou bien, si l'on rend le numérateur et le dénominateur entiers,

$$\frac{9^{12}}{9^{12} + 5^{12}}.$$

La part de A est donc $\frac{5^{12}}{9^{12} + 5^{12}}$,

et la chance de A est à celle de B comme 244140625 est à 282429536481.

Le théorème que nous venons de démontrer et qui nous a servi à simplifier la fraction considérée n'a pas besoin d'être démontré pour ceux qui connaissent l'algèbre : nous avons donné la démonstration pour ceux qui n'entendent que l'arithmétique ordinaire. Le nombre devant lequel est placé le signe + doit être ajouté à

celui qui précède; mais celui devant lequel se trouve le signe — doit être retranché du nombre précédent. Lorsqu'on écrit 5^{12}, cela veut dire qu'il faut douze fois multiplier le nombre 5 par lui-même : de cette façon 5^2 est égal à 25, 5^3 à 125, 5^4 à 625, etc.

Nous ferons voir par l'exemple suivant que la même méthode peut être employée lorsque les nombres des pièces de monnaie de A et de B ne sont pas les mêmes.

Deux personnes A et B jouent avec 2 dés ordinaires. A a deux pièces de monnaie, B en a 5. A donnera une pièce à B lorsqu'on jette 12 points, B en donnera une à A lorsqu'on jette 11 points. On demande la chance de chaque joueur.

A a 2 chances de gagner une pièce de monnaie contre B une chance. Supposons que la chance de A ait encore la valeur de 1 florin, lorsqu'il ne possède plus que 1 pièce de monnaie.

Il y a en tout 3 chances; elles valent 3 florins. Parmi elles il y a une chance qui vaut 0, les deux autres valent donc ensemble 3 florins. Cela fait $1\frac{1}{2}$ florin pour chaque chance, ce qui est la part de A lorsqu'il a 2 pièces de monnaie. Nous calculerons maintenant la part qui lui est due lorsqu'il a toutes les pièces : cette part doit être égale à l'enjeu.

Chances

$$\begin{array}{lll} 3 - 1\frac{1}{2} & \multirow{2}{*}{\Big\}} & 4\frac{1}{2} \\ 1 - 1 & & 1 \\ \hline 2 & & 3\frac{1}{2} \\ & 2 & \overline{} \end{array}$$

A $1\frac{3}{4}$, lorsqu'il a 3 pièces de monnaie.

$$\begin{array}{lll} 3 - 1\frac{3}{4} & \multirow{2}{*}{\Big\}} & 5\frac{1}{4} \\ 1 - 1\frac{1}{2} & & 1\frac{1}{2} \\ 2 & & 3\frac{3}{4} \\ & 2 & \end{array}$$

A $1\frac{7}{8}$, lorsqu'il a 4 pièces de monnaie.

$$\begin{array}{lll} 3 - 1\frac{7}{8} & \multirow{2}{*}{\Big\{} & 5\frac{5}{8} \\ 1 - 1\frac{3}{4} & & 1\frac{3}{4} \\ 2 & & 3\frac{7}{8} \\ & & 2\,\overline{\quad\quad} \end{array}$$

A $1\frac{15}{16}$, lorsqu'il a 5 pièces de monnaie.

$$\begin{array}{lll} 3 - 1\frac{15}{16} & \multirow{2}{*}{\Big\{} & 5\frac{13}{16} \\ 1 - 1\frac{7}{8} & & 1\frac{7}{8} \\ 2 & & 3\frac{15}{16} \\ & & 2\,\overline{\quad\quad} \end{array}$$

A $1\frac{31}{32}$, lorsqu'il a 6 pièces de monnaie.

$$\begin{array}{lll} 3 - 1\frac{31}{32} & \multirow{2}{*}{\Big\{} & 5\frac{29}{32} \\ 1 - 1\frac{15}{16} & & 1\frac{15}{16} \\ 2 & & 3\frac{31}{32} \\ & & 2\,\overline{\quad\quad} \end{array}$$

A $1\frac{63}{64}$, lorsqu'il a 7 pièces de monnaie.

On dit alors: l'enjeu étant $1\frac{63}{64}$, A a droit à $1\frac{1}{2}$; lorsque l'enjeu est 1, on trouve donc pour la part de A $\frac{96}{127}$ et pour celle de B $\frac{31}{127}$. Leurs chances sont donc entre elles dans le rapport 96 : 31, c.à.d. A peut parier un peu plus de 3 contre 1 qu'il gagnera.

Si dans l'exemple précédent A devait donner 1 pièce de monnaie à B lorsqu'on jette 8, et B 1 pièce de monnaie à A lorsqu'on jette 6 points, les chances de gagner une pièce de monnaie seraient égales, donc dans le rapport 1 : 1. Si alors la part de A est égale à 1 florin lorsqu'il ne possède plus qu'une pièce de monnaie, sa part serait de 2 florins lorsqu'il a 2 pièces, de 3 florins lorsqu'il en a 3, etc. Les chances des joueurs ont alors entre elles un rapport égal à celui des nombres de pièces de monnaie que chacun d'eux possède. En ce cas la chance de A est donc à celle de B comme 2 est à 5. Mais lorsqu'il y a

plus de 2 joueurs le problème est plus ardu. Nous ferons suivre ici un exemple où il y a trois joueurs.

Il y a 3 joueurs A, B et C qui jouent avec 2 dés ordinaires. A a 3 pièces de monnaie, B en a 1, C en a 2. A recevra une pièce de B et une de C lorsqu'on jette 7 points. B gagne une pièce de A et une de C lorsqu'on jette 6 avec les mêmes dés, et C une pièce de A et une de B, lorsqu'on jette 5. Celui qui n'a plus de pièces, sort du jeu et les 2 autres continuent à jouer. Celui qui obtient le premier toutes les 6 pièces de monnaie, est vainqueur. On demande le rapport des chances des trois joueurs entre elles.

Réponse. Les chances de A, de B, et de C sont entre elles comme les nombres 442301036382, 23692678875 et 96161841776. Ce sont là les nombres demandés.

Fin du Calcul des Chances au moyen de l'Arithmétique.

CALCUL DES CHANCES AU MOYEN DE L'ALGÈBRE.

Premier Problème.

Quelqu'un a c fiches, à savoir a noires, b blanches, r rouges, e bleues, d vertes, etc. On parie d'en tirer tout-de-suite au hasard p fiches dont n blanches, m noires, q rouges, o bleues, s vertes, etc. Quelle chance a-t-on de gagner le pari?

La formule est

$$\overset{m\ \text{termes}}{\frac{a \cdot \overline{a-1} \cdot \overline{a-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}}\ \text{etc.} \times \overset{n\ \text{termes}}{\frac{b \cdot \overline{b-1} \cdot \overline{b-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}}\ \text{etc.} \times \overset{q\ \text{termes}}{\frac{r \cdot \overline{r-1} \cdot \overline{r-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}}\ \text{etc.} \times$$

$$\overset{o\ \text{termes}}{\frac{e \cdot \overline{e-1} \cdot \overline{e-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}}\ \text{etc.} \times \overset{s\ \text{termes}}{\frac{d \cdot \overline{d-1} \cdot \overline{d-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}}\ \text{etc.}$$

le tout divisé par

$$\frac{c \cdot \overline{c-1} \cdot \overline{c-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ \text{etc.}$$

Le nombre total des termes de ce dénominateur doit être égal à $m + n + q + o + s + \text{etc}$, c . à . d . à p.

Premier Exemple.

On parie de tirer 4 fiches ou 4 cartes d'un jeu de 40 pièces, dont 10 de chaque couleur ou de chaque espèce, de telle manière qu'on obtient une pièce de chaque couleur ou de chaque espèce. C'est là le troisième des 5 derniers Problèmes de M. C. HUYGENS

et un cas particulier du Problème considéré. En effet, on a ici $a+b+r+e$, c. à. d $c=40$; a, b, r et e sont chacun égal à 10, m, n, q et o à 1, p à 4. On a donc

$$\frac{10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10}{\dfrac{40 \,.\, 39 \,.\, 38 \,.\, 37}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}} \text{ ou } \frac{1000}{9139},$$

de sorte qu'on peut parier 1000 contre 8139.

Deuxième Exemple.

Si l'on voulait parier de tirer d'un jeu de cartes, dont 4 de chaque couleur, 9 cartes, dont 4 coeurs, 2 trèfles, 1 carreau et 2 piques, on pourrait mettre 13122 contre 827443.

La formule que nous avons donnée ci-dessus peut être écrite d'une autre façon de sorte que la substitution devient plus rapide. Elle prend alors la forme suivante

$$\overbrace{a \,.\, \overline{a-1} \,.\, \overline{a-2} \,.\, \overline{a-3} \text{ etc.}}^{\text{m termes}} \times \overbrace{\frac{b \,.\, \overline{b-1} \,.\, \overline{b-2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \text{ etc.}}^{\text{n termes}} \times$$

$$\overbrace{\overline{m+1} \,.\, \overline{m+2} \,.\, \overline{m+3} \text{ etc.}}^{\text{p—m termes}} \times \overbrace{\frac{r \,.\, \overline{r-1} \,.\, \overline{r-2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \text{ etc.}}^{\text{q termes}},$$

le tout divisé comme précédemment par

$$c \,.\, \overline{c-1} \,.\, \overline{c-2} \,.\, \overline{c-3}.$$

Le nombre des termes de ce produit doit être p.

Troisième Exemple.

Si l'on avait 15 fiches, dont 6 blanches, 5 noires et 4 rouges, et si l'on voulait parier d'en tirer tout-de-suite 4 noires, 2 blanches et 3 rouges, on ne pourrait mettre que 60 contre 941.

Quatrième Exemple.

Mais si l'on n'avait que des fiches noires et des fiches blanches, et que $a+b$ ou $c=12$, $a=8$, $b=4$, $n=3$ et $m=4$, ce serait là le quatrième des 5 derniers Problèmes de M. C. Huygens. On a alors:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \text{ ou } \frac{35}{99}.$$

On peut donc mettre 35 contre 64.

Dans l'année 1710, on a tiré à Paris une loterie dite loterie de Lorraine. Le prix de chaque lot était de 10 sous. Il y avait un million de lots. L'organisateur de la loterie qui recevait donc 500000 florins, en rendait 425000 sous forme de 20000 prix. Et pour offrir au public un avantage en compensation des 75000 florins qui lui restaient, il avait fait encore cette condition en faveur des joueurs, que toute personne qui aurait pris cinquante lots et qui n'aurait obtenu aucun prix, rentrerait en possession de ses 25 florins.

L'Auteur de l',,Analyse'' que nous avons déjà nommé plusieurs fois a proposé à ce sujet aux mathématiciens dans le Journal des Sçavans du mois de Mars 1711 1) le problème suivant.

Cinquième Exemple.

Si l'on suppose que chaque joueur achète 50 lots ou un nombre de lots divisible par 50, on demande quelle somme l'organisateur de la loterie devra payer en vertu de la condition nommée.

M. NICOLAS BERNOULLI de Bâles a donné la solution suivante de ce problème dans le Journal des Sçavans du 13 Juillet 1711 2).

On peut comparer cette loterie au jeu suivant. L'organisateur peut être censé avoir 20000 dés avec un million de faces chacune, dont 50 seulement sont marquées et avoir parié de jeter au moins une des faces marquées. Le nombre de cas défavorables est 999950^{20000}, et le nombre total des chances 1000000^{20000}. Il s'ensuit que la condition d'après laquelle il doit rendre l'argent à ceux qui n'ont aucun prix en 50 lots, lui coûte $\frac{999950^{20000}}{1000000^{20000}} \times 25$, c.à.d. en tout $\frac{999950^{20000}}{1000000^{20000}} \times 50000$ florins, ou, comme on trouve au moyen de logarithmes, 184064 florins et environ dix sous.

L'auteur de l',,Analyse'' trouve la même réponse à-peu-près de

1) On trouve ce problème dans le Journal des Sçavans, publié à Amsterdam chez les JANSSONS à WAESBERGE, dans le numéro d'Avril 1711. N. d. tr.

2) La solution de N. BERNOULLI se trouve dans le numéro de Septembre 1711. (N. d. tr.)

la même manière, ce qui m'étonne parce qu'il avoue lui-même qu'on devrait chercher la réponse à l'aide de combinaisons. Mais il pensait qu'on n'avait pas découvert la voie pour y parvenir. Toutefois le problème n'offre en vérité aucune difficulté, car c'est un cas particulier du problème suivant. Posons 1000000, le nombre de lots, $= c$; 20000, celui des prix, $= a$, l'enjeu total $= p$; posons encore $c - a$, le nombre des non-valeurs $= b$. Le cas est analogue à celui où l'organisateur de la loterie aurait $a + b$ fiches, à savoir a noires et b blanches, et où il aurait parié d'avoir au moins une fiche noire parmi les $\frac{c}{a}$ premières fiches qu'il en tirerait, c.à.d. qu'il perdrait si elles étaient toutes blanches. Alors, dans la formule précédente, $n =$ zéro, chaque lot vaut $\frac{p}{c}$ florins, $\frac{c}{a}$ lots valent donc $\frac{p}{a}$ florins. L'organisateur devra donc payer en moyenne

pour $\frac{c}{a}$ lots $\quad \frac{p}{a} \times \frac{b \,.\, \overline{b-1} \,.\, \overline{b-2} \,.\, \overline{b-3}, \text{ etc.}}{c \,.\, \overline{c-1} \,.\, \overline{c-2} \,.\, \overline{c-3}, \text{ etc.}}$ florins.

Le nombre des termes du numérateur et celui des termes du dénominateur doivent être chacun égal au nombre d'unités que contient le nombre $\frac{c}{a}$. La somme totale que l'organisateur de la loterie doit payer en vertu de cette condition est exprimée par la formule $p \frac{b \,.\, \overline{b-1} \,.\, \overline{b-2} \,.\, \overline{b-3}, \text{ etc.}}{c \,.\, \overline{c-1} \,.\, \overline{c-2} \,.\, \overline{c-3}, \text{ etc.}}$. Les termes du numérateur et du dénominateur sont les mêmes que précédemment; mais comme ils auraient chacun 50 termes et que ce serait un grand travail que de les multiplier l'un par l'autre, nous avons inventé une méthode pour en chercher approximativement la valeur numérique à l'aide de logarithmes. C'est la suivante:

Le log. de 1000000 est 20000000	Le logar. de 999951 est 59999787
,, ,, ,, 980000 ,, 19912261	,, ,, ,, 979951 ,, 59912043
87739	87744
87744	
175483	

$\frac{175483}{2}$

$87741\frac{1}{2}$, ce qui, multiplié par 50, donne 438075. Le reste est évident.

Pour trouver le nombre qui correspond avec ce logarithme, ajoutez-y le logarithme d'un nombre arbitrairement choisi, mais tel que la somme ne peut être trouvée dans la table que tout justement. Je prends celui de 3600, ce logarithme est 35563025. On a donc 39950100. Le nombre qui correspond avec ce logarithme est environ $9885\frac{3}{4}$.

$9885\frac{3}{4} — 3600 — 20000$ { il a donc $7283\frac{1}{3}$ 1) chances de perdre 25 florins, ce qui fait 182080 florins.

Cette réponse est différente de celle trouvée par les Messieurs nommés plus haut. Mais il m'est impossible de voir que le problème avec les dés que ces Messieurs ont eu l'idée de substituer au problème de la loterie, est analogue à ce dernier 2). Cela se voit mieux par l'Exemple suivant.

Sixième Exemple.

Supposons qu'il y ait 6 lots à fl. 1 la pièce, et 2 joueurs A et B qui prennent chacun 3 lots. Il y a 4 non-valeurs et 2 prix. Si un des joueurs n'obtient aucun prix, on lui rendra ses 3 florins. Admettons qu'on tire d'abord d'un côté les trois lots de A, de l'autre trois billets pris au hasard parmi les billets qui correspondent à tous les prix et à toutes les non-valeurs. C'est la même chose que si l'on tirait les lots de A et ceux de B dans un ordre quelconque. On voit alors par la théorie des combinaisons que 6 lots peuvent être tirés 3 à 3 de 20 manières différentes, à savoir:

A a	4	chances de tirer	3 nonvaleurs
	12		2 non-valeurs et 1 prix
	4		1 non-valeur et 2 prix

				florins
Il y a donc aussi	4	chances pour que	A reçoive fl. 3	12
	12		A ne paye rien	0
	4		B reçoive fl. 3	12
				24
			20	—
			perte de fl.	$1\frac{1}{5}$,

1) Dans nos notations: $9885\frac{3}{4} : 3600 = 2000 : x$, d'où $x = 7283\frac{1}{3}$. (N. d. tr.)

2) Voir à la pag. 2, où l'auteur renvoie le lecteur à la dernière page du „Calcul des loteries et des intérêts". (N. d. tr.)

et à l'aide de notre formule $6 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4}$ ou fl. $1\frac{1}{5}$ comme précédemment.

D'après les idées de M. N. BERNOULLI, le cas serait analogue à celui où l'organisateur de la loterie aurait 2 dés, à six faces chacun, parmi lesquelles 3 seulement seraient marquées sur chaque dé, et où il parierait de jeter du premier coup au moins une des faces marquées. Le nombre de cas défavorables est $\overline{6-3}^{2}$ ou 9, le nombre total des coups qu'on peut faire avec les dés est 6^2 ou 36. En divisant 9 par 36 et en multipliant le quotient par 6, on trouve une perte de $1\frac{1}{2}$ florins. Cette perte est plus grande que celle que nous avons trouvée.

Comme dans cette petite loterie on connaît d'avance toutes les chances, et qu'on les connaît aussi dans le cas des dés, on voit que les deux problèmes ne sont pas analogues. D'après nous, les Messieurs nommés ont donc appliqué une fausse méthode. 1)

Septième Exemple.

S'il y a q as parmi p cartes et qu'on parie d'avoir tous les as parmi les r premières cartes qu'on tire du jeu, quelle chance de gagner aura-t-on?

On trouve aisément par ce qui précède que la formule est

$$\frac{r \cdot \overline{r-1} \cdot \overline{r-2} \cdot \overline{r-3}}{p \cdot \overline{p-1} \cdot \overline{p-2} \cdot \overline{p-3}} \text{ etc.}$$

Le nombre des termes du numérateur, aussi bien que celui des termes du dénominateur, doit être égal à q.

Si l'on pose $p = 36$, $q = 4$ et $r = 9$, on trouve qu'on pourrait parier 2 contre 933 d'avoir tous les as parmi les r premières cartes.

Cette formule fait voir qu'en jouant „bruyten" avec 36 cartes, on pourrait parier 8 contre 27 d'obtenir un couple (c. à d. un roi et une dame de même couleur) en 9 cartes, 1412 contre 5133 d'obtenir un seul couple, ni plus ni moins, 367 contre 28618 d'avoir 2 couples, ni plus ni moins, 579 contre 3451581 d'obtenir 3 couples, ni plus ni moins, et 1 seulement contre 3362259 d'avoir tous les quatre couples. Mais si l'on veut calculer la chance d'avoir

1) Voir la note précédente. (N. d. tr.)

un couple du joueur auquel l'atout est échu, il faut faire pour 10 cartes le calcul qui ici a été fait pour 9 cartes. 1)

Deuxième Problème.

A joue un jeu où il y a c chances en tout. Il y a b chances de ne pas gagner le jeu de prime abord. On demande combien de fois ou doit lui permettre de continuer à jouer, pour qu'il puisse parier r contre p.

Posons le nombre demandé = x, et l'enjeu qu'on peut gagner = 1. Si l'on nous imposait de jeter 6 points du premier coup avec un dé ordinaire, nous aurions droit à $\frac{1}{6}$. Le reste est alors $\frac{5}{6}$. Au deuxième coup nous avons de nouveau droit à la sixième partie de $\frac{5}{6}$. Le reste est alors $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$. Au troisième coup nous avons de nouveau droit à la sixième partie de ce reste. Le reste sera alors $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$. Six est le nombre total des chances; donc $c = 6$. Le nombre des chances défavorables ã A est 5 au premier coup. Si on lui permet de jeter x fois, sa part est exprimée par $1 - \frac{b^x}{c^x}$ ou, si l'on pose $c - b = a$, il a a chances de gagner du premier coup. Sa part est donc $\frac{a}{c}$. En soustrayant cette fraction de l'unité on voit qu'il reste $1 - \frac{a}{c}$ ou $\frac{b}{c}$. Après cela il a a chances de gagner ce reste. Le nombre total des chances est c. Le prix du deuxième coup est donc $\frac{ab}{cc}$. En soustrayant cette fraction de $\frac{b}{c}$, on voit qu'il reste $\frac{bb}{cc}$. Il appert par là que le prix du troisième coup sera $\frac{abb}{c^3}$, du quatrième $\frac{ab^3}{c^4}$, etc. A a donc droit à la somme $\frac{a}{c} + \frac{ab}{cc} + \frac{abb}{c^3} + \frac{ab^3}{c^4} + \frac{ab^4}{c^5} +$ etc. Le nombre des termes doit être x. La somme de ces termes, c. à d. la part de A, est,

1) Pour comprendre ce passage, il n'est pas nécessaire de connaître les règles du jeu „bruyten". Nous avons omis la dernière question relative à ce jeu, à laquelle cette remarque ne s'applique pas. (N. d. tr.

comme nous l'avons dit plus haut, $1 - \frac{b^x}{c^x}$. Ce nombre doit être égal à $\frac{r}{p+r}$ (car si l'enjeu de A est r et celui du second joueur p, l'enjeu total est p + r, et la part qui revient à A est $\frac{r}{p+r}$). Nous trouvons par réduction de cette équation

$$\frac{c^x}{b^x} = \frac{p+r}{p}.$$

En prenant le logarithme des deux membres et en tirant x de l'équation, on trouve

$$x = \frac{\log. \overline{p+r} - \log. p.}{\log. c - \log. b.}$$

Premier Exemple.

Supposons qu'on demande en combien de coups on pourrait parier (1 contre 1) de jeter 2 six avec 2 dés ordinaires. En ce cas $p = r = 1$, $c = 36$ et $b = 35$. On trouvera : en 24 à 25 coups.

Deuxième Exemple.

Mais si l'on veut parier 10 contre 1, on trouve 84 à 85 coups, et si l'on veut parier 3 contre 1, 49 coups et une fraction.

Troisième Exemple.

Mais si l'on voulait parier 1 contre 2, ou trouverait 14 à 15 coups, et si l'on voulait parier 1 contre 3, 10 coups et une fraction.

Quatrième Exemple.

Si l'on veut parier 1 contre 1 de jeter 3 six avec 3 dés ordinaires, on trouve 149 coups. De même on peut accepter de jeter 4 six avec 4 dés en 898 coups à-peu-près.

Cinquième Exemple.

En combien de fois peut on parier 1 contre 1 d'avoir tous les 4 as parmi 9 cartes qu'on tire d'un jeu de 36 cartes? On a $c = 935$, $b = 933$, $r = p = 1$. On trouve la réponse suivante : en 324 coups.

Sixième Exemple.

On veut parier 1 contre 1 de tirer 4 cartes, une de chaque couleur, d'un jeu de 40 cartes, dont 10 de chaque couleur. En ce cas $p = r = 1$, $c = 9139$ d'après le premier Exemple du premier Problème, et $b = 8139$. On trouve alors qu'il y a avantage à faire le pari, si l'on peut tirer 6 fois.

Septième Exemple.

Si l'on veut parier 1 contre 1 de jeter 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec 6 dés ordinaires, on doit pouvoir faire 45 à 46 coups.

Huitième Exemple.

Mais si après avoir jeté les dés nous avons le droit de retourner en notre faveur l'un quelconque des dés, pour obtenir 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou aura $c = 81$, $b = 61$, $p = r = 1$. On trouvera alors qu'il y a avantage à faire le pari si l'on peut jeter 3 fois.

On peut trouver la solution du Problème proposé d'après une méthode différente. Nous commencerons par supposer les enjeux égaux, et par chercher les limites entre lesquelles x doit se trouver. Posons $\frac{b}{c-b} = n$. On a alors $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x = 2$.

Élevant $1 + \frac{1}{n}$ à la puissance x, nous avons

$$1 + \frac{x}{n} + \frac{x \cdot \overline{x-1}}{1 \cdot 2 \cdot nn} + \frac{x \cdot \overline{x-1} \cdot \overline{x-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} + \frac{x \cdot \overline{x-1} \cdot \overline{x-2} \cdot \overline{x-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4} + \text{etc.} = 2.$$

Si l'on pose $n = 1$, il s'ensuit $x = 1$, ou $x = 1 \cdot n$. C'est là la première limite. Mais x a nécessairement une valeur inférieure à celle donnée par cette dernière formule. Pour le faire voir, posons $n = \infty$. Alors x est également ∞. L'équation sus-énoncée devient alors

$$1 + \frac{x}{n} + \frac{xx}{1 \cdot 2 \cdot nn} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n^4} + \text{etc.} = 2.$$

Si nous posons $\frac{x}{n} = y$, nous aurons

$$2 = 1 + y + \frac{1}{2} yy + \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{24} y^4 + \text{etc. jusqu'à l'infini.}$$

Or cette série a une somme dont y est le logarithme hyperbolique; y est donc le logarithme hyperbolique de 2 1). Pour trouver maintenant la grandeur du logarithme hyperbolique de 2, il faut dire: le logarithme de 10 qu'on trouve dans les tables, c. à d. 1,00000, est au logarithme de 2 qu'on trouve dans les tables, c. à. d. à 0,301030, comme le logarithme hyperbolique de 10 qui vaut 2,302585 („Analyse démontrée" par REINAUT, 2) p. 710) est au logarithme hyperbolique cherché. Ceci donne $y = 0{,}693147$ environ; x est donc à-peu-près $\frac{693}{1000}$ n, et c'est là la deuxième limite. Elle donne pour x une valeur qui se rapproche d'autant plus de la véritable valeur que x est plus grand.

Si l'on demandait en combien de coups on pourrait jeter 2 six avec 2 dés ordinaires, on aurait $n = 35$. Multipliez ce nombre par $\frac{693}{1000}$ vous trouverez comme auparavant 24 à 25 coups. Lorsqu'il s'agit de jeter 3 six avec 3 dés, on a $n = 215$. En multipliant ce nombre par $\frac{693147}{1000000}$, on trouve 149 coups comme auparavant. Mais si l'on veut jeter 4 six avec 4 dés, on a $n = 1295$; on trouve alors 897 à 898 coups.

Si l'on veut résoudre le 5[ième] Exemple de cette manière, on a $c = 935$, $b = 933$. La différence de ces nombres est 2. En divisant 933 par 2, on trouve $n = 466\frac{1}{2}$, et en multipliant ensuite par $\frac{693147}{1000000}$, on trouvera 323 à 324 tirages.

Proposons-nous en second lieu de chercher la limite lorsque les enjeux sont inégaux; par exemple lorsqu'on veut jouer 10 contre 1 comme dans le deuxième Exemple. On opère de la même façon: seulement au lieu de chercher le logarithme de 2, il faut maintenant chercher dans la table celui de 11. On trouve de cette manière $y = 2{,}3979$, et en multipliant ceci par 35, on obtient 84 coups environ.

---

1) Dans nos notations: $e^y = 2$, ou $y = \log_e 2$. (N. d. tr.

2) „Analyse démontrée ou Manière de résoudre les problèmes de mathématiques", 1708, par CH. R. REYNEAU. (N. d. tr.)

Supposons x connu et soit demandé quelle est la part de l'enjeu auquel les deux joueurs ont droit. Si A doit avoir $1 - \frac{b^x}{c^x}$, B a droit à $\frac{b^x}{c^x}$. On peut calculer cela directement, mais si x est un grand nombre, le calcul approximatif par les logarithmes est beaucoup plus court. Multipliez à cet effet par c^x la part de A aussi bien que celle de B et divisez le produit par b^x. A est alors à B comme $\frac{c^x}{b^x} - 1$ est à 1. Prenez le logarithme de c diminué de celui de b. Multipliez la différence par x; cherchez le nombre qui correspond à ce logarithme; retranchez en l'unité. Vous aurez alors la part de A, celle de B étant supposée égale à l'unité.

Neuvième Exemple.

Si l'on nous demandait de jeter 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 100 coups avec 6 dés ordinaires, combien pourrions nous mettre contre 1?

En ce cas c = 324, b = 319. Le logarithme de 324 est 25105450, et celui de 319 est 25039707. La différence de ces nombres est 65743. Multipliez par 100; il vient 6574300. Le nombre qui correspond avec ce logarithme est environ $4\frac{68}{125}$. Si nous en retranchons 1, il reste $3\frac{68}{125}$. On pourrait donc parier $3\frac{68}{125}$ contre 1, ou 443 contre 125.

On voit aisément que la règle énoncée au commencement du Problème considéré, permet aussi de résoudre la question suivante.

A promet de donner 1 florin à B s'il jette 6 points du premier coup avec un dé ordinaire, 4 florins s'il jette 6 au deuxième coup, 9 florins s'il jette 6 au troisième coup, 16 florins si c'est au quatrième coup seulement qu'il jette 6, puis 25, 36, 49 florins, etc. Cette série se compose des carrés de tous les nombres entiers. On demande quelle est pour B la valeur de cette promesse.

Posant 6 (le nombre des faces du dé) = a, et 5 (le nombre des faces qui ne donnent pas 6) = b, on a a — b = 1. La part

de B est représentée par la somme suivante d'un nombre infini de termes :

$$\frac{1}{a} + \frac{4b}{aa} + \frac{9bb}{a^3} + \frac{16b^3}{a^4} + \frac{25b^4}{a^5} + \frac{36b^5}{a^6} + \text{etc.}$$

Pour trouver la somme des termes de cette série, agissez en sorte :

Progressions géométriques.

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{1}{a} + \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} + \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & 1 \\
\frac{2b}{aa} + \frac{2bb}{a^3} + \frac{2b^3}{a^4} + \frac{2b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & \frac{2b}{a} \\
\frac{2bb}{a^3} + \frac{2b^3}{a^4} + \frac{2b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & \frac{2bb}{aa} \\
\frac{2b^3}{a^4} + \frac{2b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & \frac{2b^3}{a^3} \\
\frac{2b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & \frac{2b^4}{a^4} \\
\text{etc.} & = & \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Donc

$$\frac{1}{a} + \frac{3b}{aa} + \frac{5bb}{a^3} + \frac{7b^3}{a^4} + \frac{9b^4}{a^5} + \text{etc.} = 1 + \frac{2b}{a} + \frac{2bb}{aa} + \frac{2b^3}{a^3} + \frac{2b^4}{a^4} + \text{etc.}$$

jusqu'à l'infini.

Si l'on remarque que les termes de cette dernière série, à l'exception du premier, forment une progression géométrique, on trouve aisément que la somme de ces termes est $1 + 2b$. Posant $1 + 2b = c$ on a

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{1}{a} + \frac{3b}{aa} + \frac{5bb}{a^3} + \frac{7b^3}{a^4} + \frac{9b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & c, \\
\frac{b}{aa} + \frac{3bb}{a^3} + \frac{5b^3}{a^4} + \frac{7b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & c \times \frac{b}{a}, \\
+ \frac{bb}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & c \times \frac{bb}{aa}, \\
+ \frac{b^3}{a^4} + \frac{3b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & c \times \frac{b^3}{a^3}, \\
+ \frac{b^4}{a^5} + \text{etc.} & = & c \times \frac{b^4}{a^4}, \\
\text{etc.} & = & \text{ctc.}
\end{array}\right.$$

donc $\frac{1}{a} + \frac{4b}{aa} + \frac{9bb}{a^3} + \frac{16b^3}{a^4} + \frac{25b^4}{a^5} + \text{etc.} = c + c \times$

$\frac{b}{a} + c \times \frac{bb}{aa} + c \times \frac{b^3}{a^3} + c \times \frac{b^4}{a^4} + \text{etc.}$

Cette dernière série est une progression géométrique dont la somme est $\frac{ac}{a-b}$ ou a c, vu que $a - b = 1$.

L'avantage que B est en droit d'attendre est donc = 66. Mais si, au lieu de la série composée des nombres carrés, on avait pris les nombres 1, 2, 3, 4, 5 etc. sa part serait 6. Et si l'on prend 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc. sa part sera le nombre c précédemment trouvé, c. à d. 11. On pourrait proposer le même problème avec une série composée des nombres cubes, etc.

Troisième Problème.

Un nombre indéterminé de joueurs jouent avec des dés. A gagnera l'enjeu s'il jette un nombre déterminé de points. B gagnera l'enjeu s'il jette un autre nombre déterminé de points; de même pour C, D, etc. A commencera par jeter i fois, B k fois, C l fois, D m fois, E n fois, F o fois, etc. Ensuite A jettera r fois, B s fois, C t fois, D v fois, E w fois, F x fois, etc., et l'on continuera de la même manière jusqu'à ce que l'un des joueurs aura gagné. Quelle sera la chance de chacun d'eux?

Supposons que A doive jeter 12 points avec 2 dés ordinaires. Alors, s'il consent à ne pas jeter une fois, on doit lui donner $\frac{1}{36}$ de l'enjeu. Il restera alors $\frac{35}{36}$. Posons ce nombre = a. Si B doit jeter 11 points, on doit lui offrir $\frac{1}{18}$ de ce qui reste de l'enjeu s'il consent à laisser passer son tour. Il restera alors $\frac{17}{18}$. Posons ce nombre = b, et de même c = le nombre correspondant pour C, d et e les nombres correspondants pour D et E respectivement.

Nous résoudrons ici un problème de 3 joueurs; à l'aide de notre solution ou verra aisément comment on peut prendre un plus grand nombre de joueurs jusqu'à l'infini. Nous avons vu au problème précédent que les i coups que A peut faire au commencement ont pour lui la valeur $1 - a^i$. Pour les autres joueurs, si A renonce à jouer et qu'on lui paie l'indemnité à laquelle il a droit, il reste a^i.

Après cela B fera k coups. Si l'enjeu total est ı, sa part d'après le problème précédent est $1 - b^k$. Puisqu'il restait a^i, on trouvera donc que la valeur des coups que B peut faire au commencement est $a^i - a^i b^k$. Retranchez ce nombre de a^i, l'enjeu qui restait ; il restera donc, après qu'on aura payé à B l'indemnité à laquelle il a droit, $a^i b^k$. Pour l coups C devra recevoir $1 - c^l$, lorsque l'enjeu est ı ; mais puisqu'il est $a^i b^k$, on trouve que les coups de C ont une valeur $a^i b^k - a^i b^k c^l$. Le reste de l'enjeu est alors $a^i b^k c^l$, Les r coups que A doit faire ensuite, ont la valeur $a^i b^k c^l (1 - a^r)$ d'après ce qui précède. Si nous retranchons cela de $a^i b^k c^l$, il reste $a^i b^k c^l a^r$. Après cela B jette s fois. Sa part, d'après ce qui précède, est donc $a^i b^k c^l (a^r b^s - a^r b^s c^t)$. 1) Et comme les parts qui reviennent à A, B et C respectivement pour les coups qu'ils doivent faire chaque fois, doivent avoir entre elles jusqu'à l'infini les mêmes rapports que lorsqu'il s'agit des premiers r coups de A, des premiers s coups de B et des premiers t coups de C, il s'ensuit qu'il suffit de partager $a^i b^k c^l$ en raison des nombres suivants.

A	$a^i b^k c^l \times (1 - a^r)$,
B	$a^i b^k c^l \times (a^r - a^r b^s)$,
C	$a^i b^k c^l \times (a^r b^s - a^r b^s c^t)$.
Somme	$a^i b^k c^l \times (1 - a^r b^s c^t)$.

Les parts des trois joueurs seront donc

$$\begin{cases} A \ \dfrac{a^i b^k c^l \times (1 - a^r)}{1 - a^r b^s c^t}; \\ B \ \dfrac{a^i b^k c^l \times (a^r - a^r b^s)}{1 - a^r b^s c^t}; \\ C \ \dfrac{a^i b^k c^l \times (a^r b^s - a^r b^s c^t)}{i - a^r b^s c^t}. \end{cases}$$

Et en ajoutant à ces nombres la part qui revient à chacun d'eux à cause des coups antérieurs (l'enjeu étant ı), on trouve pour la part totale de chaque joueur

1 Il faut lire: „Sa part d'après ce qui précède, est donc $a^i b^k c^l (a^r - a^r b^s)$. Si nous retranchons cela de $a^i b^k c^l a^r$ il reste $a^i b^k c^l a^r b^s$. La part de C, qui jette t fois, est donc $a^i b^k c^l (a^r b^s - a^r b^s c^t)$. N. d. tr.

$$\begin{cases} A & 1 - a^i + \dfrac{a^i\, b^k\, c^l \times (1 - a^r)}{1 - a^r\, b^s\, c^t}\,; \\ B & a^i - a^i\, b^k + \dfrac{a^i\, b^k\, c^l \times (a^r - a^r\, b^s)}{1 - a^r\, b^s\, c^t}\,; \\ C & a^i\, b^k - a^i\, b^k\, c^l + \dfrac{a^i\, b^k\, c^l \times (a^r\, b^s - a^r\, b^s\, c^t)}{1 - a^r\, b^s\, c^t}\,. \end{cases}$$

Mais pour trouver la part qui revient à chacun, lorsque le nombre des joueurs est quelconque, il faut remarquer que la chance de chaque joueur se compose d'une partie entière et d'une fraction et que la partie entière comprend deux termes, dont le premier est positif et le second négatif. Le second terme doit contenir un nombre de facteurs égal au numéro d'ordre du joueur dont on veut calculer la chance. Les exposants doivent être les nombres des coups que les joueurs font au commencement. Si l'on divise ce terme par le nombre qui donne le reste correspondant au joueur prénommé, ce reste étant élevé à une puissance égale au nombre des coups que ce joueur fait au commencement, on a le premier terme. Les facteurs eux-mêmes sont les restes a, b, c, d, e, etc. Pour trouver maintenant la fraction, mettez dans le numérateur tous les restes a, b, c, d, e, etc. Les exposants sont les nombres i, k, l, m, n, etc. des coups que les joueurs peuvent faire au commencement. Ajoutez-y comme multiplicateur la partie entière; seulement les exposants, au lieu d'être égaux aux nombres des coups que les joueurs peuvent faire au commencement, doivent être égaux à ceux des coups réguliers, c. à d. à r, s, t, etc. Mettez alors dans le dénominateur l'unité et retranchez-en les premiers facteurs du numérateur, mais en changeant les exposants en r, s, t, etc. les nombres des coups réguliers. Vous aurez ainsi la part demandée.

S'il y a 6 joueurs, on trouve immédiatement par cette règle pour la part du cinquième joueur E

$$a^i\, b^k\, c^l\, d^m - a^i\, b^k\, c^l\, d^m\, e^n + \frac{a^i\, b^k\, c^l\, d^m\, e^n\, f^o \times (a^r\, b^s\, c^t\, d^v - a^r\, b^s\, c^t\, d^v\, e^w)}{1 - a^r\, b^s\, c^t\, d^v\, e^w\, f^x}$$

Si l'on suppose que les joueurs ne font pas les coups préliminaires dont nous avons parlé, la partie entière de la formule disparaît; on a alors $i = k = l$, etc. $= 0$. On a donc alors

A	$1 - a^r$
B	$+ a^r - a^r b^s$
C	$+ a^r b^s - a^r b^s c^t$
D	$+ a^r b^s c^t - a^r b^s c^t d^v$
E	$+ a^r b^s c^t d^v - a^r b^s c^t d^v e^w$
F	$+ a^r b^s c^t d^v e^w - a^r b^s c^t d^v e^w f^x$.

Voilà les chances qu'ils ont l'un par rapport à l'autre. Mais si l'on veut savoir ici, comme dans la formule qui se rapporte au cas précédent, la part de l'enjeu qui revient à chacun d'eux, on peut considérer les nombres que nous venons d'écrire comme les numérateurs d'une fraction, dont le dénominateur est l'unité diminuée de $a^r b^s c^t$, etc. Le nombre des termes doit être égal à celui des joueurs.

Premier Exemple.

Supposons que trois joueurs jouent avec deux dés, et que chacun puisse faire deux coups l'un après l'autre, A d'abord, puis B, ensuite C; que A gagne le jeu s'il jette 11, B s'il jette 10, C s'il jette 7 points. Quelle sera la chance de chaque joueur?

On a ici $a = \frac{17}{18}$, $b = \frac{11}{12}$, $c = \frac{5}{6}$; r, s et t ont chacun la valeur 2. On trouve donc pour la part de A 181440, pour celle de B 239292, et pour celle de C 384659.

S'il y a deux joueurs et que A peut commencer par faire quelques coups préliminaires et B de même, la formule pour A est

$$1 - a^i + \frac{a^i b^k \times \overline{1 - a^r}}{1 - a^r b^s}.$$

Deuxième Exemple.

Si A doit jeter 7 points et B 5 points avec deux dés, que B peut commencer par faire trois coups et A par faire 1 coup, qu'après cela A et B feront chacun un coup alternativement, on a $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{8}{9}$, $k = 3$, $i = r = s = 1$. On trouvera alors pour la part de A la fraction $\frac{7552}{15309}$.

Troisième Exemple.

Supposons que A et B jouent comme auparavant avec 2 dés ordinaires à la condition que A gagnera s'il jette 7 et B s'il jette 6 points, qu'ils feront alternativement 2 coups l'un apres l'autre, A d'abord, B ensuite et que B pourra commencer par faire un coup. C'est là le premier des 5 derniers problèmes proposés par M. C. HUYGENS, dont la solution est une solution particulière comprise dans la formule précédente. En effet, la partie entière y est nulle et $i = 0$, la formule est donc dans le cas consideré $\frac{b^k \times \overline{1 - a^r}}{1 - a^r b^s}$, où $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{31}{36}$, $k = i$, $r = 2$, et $s = 2$. On trouve donc pour la part de A $\frac{12276}{22631}$ et pour celle de B $\frac{10355}{22631}$.

Quatrième Exemple.

Supposons que A gagne le jeu s'il jette 7 points et B s'il jette 9 points avec 2 dés, que B puisse faire 10 coups préliminaires, et qu'ensuite A fasse 3 coups et B 2 coups alternativement jusqu'à ce que l'un d'eux gagne le jeu. On trouve alors pour la part de A le nombre $\frac{24427626496}{146008229373}$, et pour B le reste.

Cinquième Exemple.

Supposons que 3 joueurs A, B et C jouent avec 2 dés. A gagnera le jeu s'il jette 11 points, B s'il en jette 10 et C s'il en jette 7. Ils feront chacun deux coups l'un après l'autre, A d'abord, puis B, ensuite C, à la condition que A ne fera qu'un seul coup la première fois. On demande quelle est la part qui revient à chacun d'eux.

Dans la première formule de ce problème on a alors $a = \frac{17}{18}$, $b = \frac{11}{12}$, $c = \frac{5}{6}$, $i = 1$, $k = l = r = s = t = 2$. On trouvera pour A 144737, pour B 253368, et pour C 407286.

On pourrait abréger la solution de ce problème en remarquant que B fait d'abord 2 coups, puis C 2 coups, ensuite A, B, C, A etc. le même nombre de coups, à la condition que A peut commencer par faire un coup. On a alors $a = \frac{11}{12}$, $b = \frac{5}{6}$, $c = \frac{17}{18}$, $k = i = 0$, $l = 1$, $r = s = t = 2$, à cause de l'ordre des joueurs.

Comme B n'a pas de coups préliminaires, il faut ôter de la formule la partie entière, et i et k étant alors nuls, on trouve pour B (c. à. d. pour A dans la formule sus-énoncée) $\frac{c^l \times \overline{1 - a^r}}{1 - a^r b^s c^t}$ et par là les mêmes réponses que précédemment.

Dans l'année 1685 M. JACQUES BERNOULLI a proposé les deux problèmes suivants dans le Journal des Sçavans.

Sixième Exemple.

Deux joueurs A et B jouent aux dés. Celui-là sera vainqueur qui le premier jettera un nombre déterminé de points. A fera d'abord un coup, puis B, ensuite A en fera 2 et B aussi; puis A 3 et B également 3 coups, et ainsi de suite l'un après l'autre d'après une progression arithmétique; ou bien A fera d'abord un coup, puis B 2 coups, ensuite A 3 coups, B 4 coups, etc. jusqu'à ce que l'un d'eux aura gagné le jeu. Quelle sera la chance de chacun d'eux?

Pour résoudre la première question, je remarque qu'il y a un nombre infini de joueurs, que A jette d'abord 1 fois, B également 1 fois, puis C et D chacun 2 fois, ensuite E et F chacun 3 fois; et qu'ils se proposent tous de jeter le même nombre de points. Si l'on a calculé alors la part qui revient au nombre infini des joueurs de rang impair, on a la part de A dans le cas du premier problème. Le reste de l'unité constitue la part de B. Dans la formule qui précède le premier Exemple appartenant au Problème considéré, on a alors $b = c = d = e = a$. De plus $r = s = 1$, $t = v = 2$, $w = x = 3$, etc. On trouve donc pour la part de A les progressions infinies suivantes

$$\frac{a^1}{a^1} + \frac{a^4}{a^2} + \frac{a^9}{a^3} + \frac{a^{16}}{a^4} + \frac{a^{25}}{a^5} + \text{etc.} - a^1 - a^4 - a^9 - a^{16} - a^{25} - a^{36} - a^{49} - \text{etc.}$$

La part de B est exprimée par

$$a + a^4 + a^9 + a^{16} + a^{25} + a^{36} + \text{etc.} - \frac{a^4}{a^2} \quad \frac{a^9}{a^3} \quad \frac{a^{16}}{a^4} \quad \frac{a^{25}}{a^5} \quad \text{etc}$$

Dans le cas de la deuxième question la part de A est

$$1 + a^3 + a^{10} + a^{21} + a^{36} + \text{etc.} - a - a^6 - a^{15} - a^{28} - \text{etc.}$$

On voit aisément comment on peut continuer ces séries jusqu'à l'infini: on en trouve les termes de la façon suivante:

$1 \quad a^3 \quad a^7 \quad a^{11} \quad a^{15}$ (progr. géom.)

$\quad 1 \quad a^3 \quad a^{10} \quad a^{21}$

$1 + a^3 + a^{10} + a^{21} + a^{36}$, etc.

et

$a \quad a^5 \quad a^9 \quad a^{13} \quad a^{17}$ (progr. géom.)

$\quad a \quad a^6 \quad a^{15} \quad a^{28}$

$— a — a^6 — a^{15} — a^{28} — a^{45}$, etc.

Le reste de l'unité constitue la part de B.

Quatrième Problème.

Un nombre indéfini de joueurs A, B, C, D, etc. jouent aux dés en se proposant de jeter un nombre déterminé de points. Il y a q. chances de ne pas gagner le jeu du premier coup. Le nombre total des chances que les dés présentent est r. A fera d'abord i coups, puis B, ensuite C, etc. feront chacun un nombre de coups tel que les chances de tous les joueurs seront les mêmes: on demande combien de coups il faudra accorder à chacun des joueurs suivants?

Le nombre $\frac{q}{r}$ dans ce Problème correspond avec le nombre a du Problème précédent. Posons p = le numéro d'ordre d'un joueur quelconque, x = le nombre des coups qu'il doit faire. La part de l'enjeu qui revient à A est $1 — a^i$. Avant le joueur qui a le numéro d'ordre p, p — 1 personnes ont déjà joué. Pour les faire consentir à laisser passer leur tour, il faudrait leur payer $p — 1 \times \overline{1 — a^i}$ ou $p — a^i\, p — 1 + a^i$. En retranchant ce nombre de l'unité, on trouve $2 — p + a^i\, p — a^i$. Le joueur qui a le numéro p jette x fois pour gagner cette somme; sa part d'après ce qui précède est donc $(1 — a^x)$. $(2 — p + a^i\, p — a^i)$ ou $2 — p + a^i\, p — a^i — 2\, a^x + p\, a^x — a^i\, p\, a^x + a^i\, a^x$. Cette expression doit être égale à $1 — a^i$. On trouve donc

$$a^x = \frac{1 — p + a^i\, p}{2 — p + a^i\, p — a^i}.$$

Remplacez alors a par $\frac{q}{r}$ et multipliez le tout par r^i, vous trouverez

$$\frac{q^x}{r^x} = \frac{p \times q^i — \overline{p — 1} \times r^i}{\overline{p — 1} \times q^i — \overline{p — 2} \times r^i}.$$

En posant g = le logarithme du numérateur et h = celui du dénominateur, on a

$$x = \frac{h - g}{\text{Log } r - \text{Log } q}.$$

Mais si le joueur dont le numéro d'ordre est p avait t chances de manquer le premier coup, on aurait

$$x = \frac{h - g}{\text{Log } r - \text{Log } t}. \quad 1)$$

Premier Exemple.

Si l'on jouait avec 2 dés ordinaires à la condition que A commencerait par faire un coup dans le but de jeter 12 points, le trentième joueur devrait faire 5 à 6 coups.

Deuxième Exemple.

Supposons que l'on joue avec trois dés ordinaires, que l'on se propose de jeter 3 six, et que A puisse commencer par faire deux coups. Alors un joueur qui aurait le numéro d'ordre 30, aurait le droit de faire $3\frac{1}{5}$ coups. On pourrait faire cette objection qu'il est impossible de faire $\frac{1}{5}$ coup. Il est possible toutefois de mettre dans un sac 5 billets, dont 1 marqué. Si le joueur, en tirant aveuglément un billet du sac, obtient tout-de-suite le billet marqué, il a le droit de faire encore un coup. Sinon, le tour est au joueur suivant.

Cinquième Problème.

On jettera avec q dés ayant chacun p côtés marqués 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. A chaque coup je paierai à mon adversaire un nombre de florins ou de sous égal au nombre de fois que se présente une face déterminée (par exemple la face 6). On demande ce qu'il devra me donner à moi, pour égaliser les chances, lorsque pas un seul 6 ne se trouve parmi les faces que les dés présentent.

Posez $p - 1 = s$.

Pour mieux comprendre la méthode générale, nous commencerons par l'appliquer à un cas particulier. Supposons que nous ayons 4 dés ordinaires. Il n'y a qu'une seule manière de jeter 4 six.

1 L'auteur veut dire qu'on trouve la même formule lorsque le nombre de chances de manquer le premier coup est différent pour chaque joueur. Le nombre q contenu dans les expressions h et g] représente alors ce nombre de chances pour le premier joueur. (N. d. tr.)

Le nombre 4 correspond à q. Trois six, vu qu'il y en a quatre en tout, peuvent être pris de 4 ou de q façons différentes. Mais comme chaque six peut être jeté ensemble avec un des 5 autres côtés (on a 5 = p — 1 = s), il faut multiplier s par q et le produit encore par q — 1, puisque nous payons pour chaque 6 qui se présente. Deux ou (q — 2) six peuvent être jetés de 6 façons différentes, car 4 objets peuvent être combinés 2 à 2 de six façons différentes, ce qui dans le language de l'algèbre s'exprime ainsi : q objets doivent être combinés (q — 2) à (q — 2) de toutes les façons différentes possibles ; leur nombre est $\frac{q \cdot q - 1}{1 \cdot 2}$ d'après la théorie des combinaisons. Et comme 2 six peuvent être jetés ensemble avec 5 ou s faces du premier dé et aussi avec chacune des 5 ou s faces du deuxième dé, le nombre total des cas où l'on peut jeter 2 ou (q — 2) six est $\frac{q \cdot q - 1}{1 \cdot 2} s^2$. Puisque nous devons payer pour chaque six, il faut multiplier encore par 2 ou (q — 2). Pour bien comprendre cela, il faut se rappeler que q objets peuvent être pris 2 à 2 d'un nombre de façons différentes égal à celui dont q objets peuvent être pris (q — 2) à (q — 2).

Quant au nombre de coups qui ne donnent aucun six, supposons que nous ayons 3 dés A, B et C. Le 1 de A peut être jeté simultanément avec le 1, le 2, le 3, le 4 ou le 5 de B. Il en est de même pour le 2, le 3, etc. de A. On peut donc avec les deux dés faire 5 fois 5 coups qui ne donnent aucun six. Or, le 1 du dé C peut être jeté simultanément avec chacune des 25 combinaisons qu'on peut former avec 1 face de A et 1 face de B ; de même le 2, le 3 etc. du dé C. Par conséquent, on peut avec les 3 dés faire 25 × 5 coups qui ne donnent aucun six, c.à.d. s^3 coups.

		Nombre de six
1		q
s	$\frac{q}{1}$	q — 1
s^2	$\frac{q \cdot q - 1}{1 \cdot 2}$	q — 2
s^3	$\frac{q \cdot q - 1 \cdot q - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	q — 3
s^4	$\frac{q \cdot q - 1 \cdot q - 2 \cdot q - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	q — 4

$$\left\{\begin{array}{l} q \\ q \cdot \frac{\overline{q-1}}{1} \times s \\ q \cdot \frac{\overline{q-1} \cdot \overline{q-2}}{1 \cdot 2} \times s^2 \\ q \cdot \frac{\overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times s^3 \\ q \cdot \frac{\overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3} \cdot \overline{q-4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times s^4 \end{array}\right.$$

La somme de ces expressions est $1 + \frac{\overline{q-1}}{1} \times s + \frac{\overline{q-1} \cdot \overline{q-2}}{1 \cdot 2} \times s^2 + \frac{\overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times s^3 +$ etc. multiplié par q.

Le nombre des termes de la progression précédente doit être q. On trouve pour la somme de cette progression $\overline{1+s}^{\,q-1} \times q$, et comme $1 + s = p$, on trouve $p^{q-1} \times q$ pour le nombre de florins ou de sous que nous devrons payer. Et le nombre de cas où nous recevrons quelque chose à notre tour est $\overline{p-1}^{\,q}$. 1)

Premier Exemple.

En prenant des dés ordinaires on trouvera qu'en jouant avec

2	dés, on recevra de nous	12	sous ou florins, pour tous les six qu'on aura jetés.
4		864	
6		46656	
7		326592	

Le nombre des coups possibles qui ne donnent aucun six est $\left\{\begin{array}{l} 25 \\ 625 \\ 15625 \\ 78125. \end{array}\right.$

de sorte que, si l'on reçoit 1 sou pour chaque six, on devra nous payer environ $\frac{1}{2}$ sou lorsqu'on joue avec 2 dés chaque fois qu'on n'aura jeté aucun six, et de même $\frac{7}{8}$ sou environ en jouant avec 3 dés, à-peu-près $1\frac{3}{8}$ sou en jouant avec 4 dés, à-peu-près 3 sous en jouant avec 6 dés, et un peu plus de $4\frac{1}{2}$ sous en jouant avec 7 dés.

1) Nous recevrons donc $\frac{p^{q-1} \times q}{\overline{p-1}^{\,q}}$ florins ou sous, chaque fois qu'aucun six ne se trouve parmi les faces que présentent les dés. (N. d. T.)

Deuxième Exemple.

Mais lorsqu'on a un grand nombre de dés, on peut se servir de logarithmes pour éviter les longues multiplications. C'est ce que nous ferons ici pour 12 dés.

Le log. de 5 est 6989700	Le log. de 6 est 7781512
12 Mult.	11 Mult.
83876400	85596632
	10791812 log. de 12
	96388444
	83876400
	12512044

Le nombre qui correspond à ce logarithme est $17\frac{5}{6}$ environ. Il faudra donc payer $17\frac{5}{6}$ sous chaque fois qu'on n'aura jeté aucun six. Nous avons trouvé de la même manière pour 18 dés 80 sous environ, pour 24 dés de même 318 sous, pour 48 dés 2527 florins et $17\frac{3}{4}$ sous. Mais pour 1000 dés nous trouvons qu'il faudrait mettre contre 1 sou un nombre de florins qui s'exprime par 1264 suivi de 77 autres chiffres.

Troisième Exemple.

A et B jouent avec des dés ordinaires. Pour chaque six que l'on jette B recevra un sou de A, mais lorsqu'on n'aura jeté aucun six B donnera à A un million de florins. On demande le nombre des dés avec lesquels on jouera, afin que les chances des joueurs soient égales autant que possible.

En posant le nombre de faces de chaque dé = p, 20 millions de sous = a, et le nombre des dés = x, nous aurons par ce qui précède

$$\frac{p^x - 1^x}{p - 1^x} = a.$$

On pourrait transformer l'équation trouvée en une autre et trouver ainsi la valeur de x, mais nous nous servirons ici d'un procédé plus aisé. En multipliant les deux côtés de l'équation précédente par $\frac{p}{x}$ et en tirant la racine x on trouve

$$\frac{p}{p - 1} = \sqrt[x]{\frac{a\,p}{x}}$$

En prenant le logarithme des deux membres, on a

$$\log. \frac{p}{p-1} = \frac{\log \overline{a + p - x}}{x} \quad [1]$$

ou

$$x = \frac{\log. \overline{a + p - x}}{\log. p - \log. (p - 1)}.$$

Le logarithme de a est 73010300, celui de p est 7781512, et celui de (p — 1) 6989700. On a donc, en posant log. x = y,

$$x = 102 - \frac{1}{791812} y.$$

Pour trouver ensuite une valeur approchée de y, prenez x = 100. Le logarithme de ce nombre, c.à.d. y, est alors 200000. Alors $\frac{1}{791812} y = 25$ environ, d'où l'on tire x = 77. Nous prendrons cette valeur pour voir combien la partie en question de y devient par là plus petite. Le logarithme de 77, c.à.d. y, est 18864907; alors $\frac{1}{791812} y = 24$, ou x = 78 dés. (J'ai contrôlé ce calcul, et j'ai vu que le vrai nombre est entre 78 et 79). Cette méthode est fort aisée et l'on ne peut nullement objecter que nous procédons par tâtonnements, car si nous prenons x = 100, et que nous en tirons y, et ensuite de nouveau x, nous en trouvons la valeur à 1 près, quoique x ait été pris trop grand de 22. Il s'ensuit que la vraie valeur de x doit être trouvée à peu de chose près si l'on part d'une valeur de x qui n'en diffère que par l'unité.

Quatrième Exemple.

Si l'on voulait mettre 1000 millions de florins contre un sou, l'équation serait

$$x = 140 - \frac{1}{791812} y.$$

A l'aide de cette équation on trouve par la méthode précédente un nombre de 114 dés.

Cinquième Exemple.

Si quelqu'un a comme précédemment q dés possédant chacun p faces, dont une seule est marquée sur chaque dé et que les

1) Par log. $\overline{a + p - x}$ l'auteur entend ici log. a + log. p — log. x. (N. d. [illegible])

faces marquées forment une progression arithmétique ou géométrique ou carrée ou cubique, etc., et que nous voulons payer un sou pour chaque point que nous jetons, on demande combien nous devrons recevoir lorsque toutes les faces qui se présenteront seront blanches.

Cet Exemple est à-peu-près identique avec le premier et le deuxième Exemple appartenant à ce Problème; c'est ce qui ressort de la règle suivante.

Règle.

Cherchez la somme de la progression arithmétique, géométrique, carrée ou cubique à l'aide des formules algébriques qui servent à ce but. Vous trouvez ainsi le plus grand nombre de points qu'on peut jeter avec tous les dés. Divisez le résultat par q, le nombre des dés, multipliez le quotient par la formule des sous ci-devant trouvée, vous aurez ainsi le nombre de sous que nous devrons payer dans les conditions du Problème. En divisant ce nombre par celui des chances qui nous sont favorables, on obtient le résultat demandé. Remarque: Les chances qui nous sont favorables sont les mêmes que précédemment.

Si les nombres des faces marquées sur les dés forment une progression arithmétique commençant par l'unité et dont la raison est 1, le nombre des termes de cette progression est q, et la somme des points divisée par le nombre des dés est alors $\frac{qq + q}{2q}$. Multipliez cette fraction par $p^{q-1} \times q$. Il vient $p^{q-1} \times \frac{qq + q}{2}$. C'est là le nombre des chances que nous avons de payer 1 sou. Mais il y a en notre faveur $\overline{p - 1}^{q}$ chances.

Sixième Exemple.

Si l'on veut appliquer la solution de ce problème au cas de 6 dés ayant chacun 6 faces, dont 5 blanches, les 6 faces restantes étant marquées 1, 2, 3, 4, 5, 6, on trouvera que, si l'on paye un sou pour chaque point, l'on devra recevoir 10 $\frac{7046}{15625}$ sous lorsqu'on aura jeté 6 faces blanches.

Si les dés étaient marqués d'après une progression géométrique dont le premier terme est a, et la raison b, le nombre des termes

étant q, la somme de la progression divisée par le nombre des termes serait

$$\frac{\overline{b^q - 1} \times a}{\overline{b - 1} \times q}.$$

Multipliez ceci par $p^{q-1} \times q$. Vous obtiendrez ainsi la formule désirée donnant le nombre de sous qu'il faudra payer. C'est la formule suivante:

$$p^{q-1} \times \frac{\overline{b^q - 1} \times a}{b - 1}.$$

Nous payons un sou pour chaque point. Lorsque nous n'aurons jeté aucun point nous devrons donc recevoir à notre tour

$$\frac{p^q - 1}{p - 1} - q \times \frac{\overline{b^q - 1} \times a}{b - 1} \text{ sous.}$$

L'Exemple qui suit peut être traité d'une manière analogue. Toutefois on aurait pu également commencer par cet Exemple, et l'on aurait pu traiter en partant de là tous les Exemples qui précèdent.

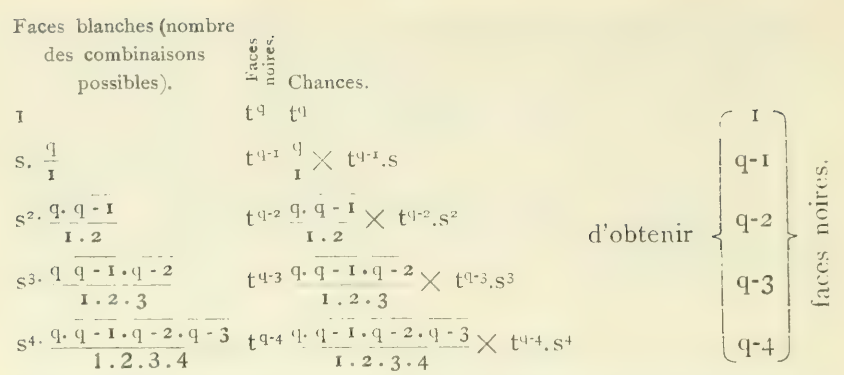
Septième Exemple.

Deux personnes jouent pour savoir lequel des deux aura le premier le droit d'effacer quelques traits. A a encore m traits à effacer, et B n traits. A a s chances d'effacer un trait, B en a t. Quelle sera la part de chacun d'eux?

Posons $m + n - 1 = q$, $s + t = p$. Pour résoudre ce problème nous nous imaginerons que A et B jouent aux dés, comme dans l'Exemple précédent.

Dans cet Exemple-là chaque dé n'avait qu'une face marquée, mais ici chaque dé a plusieurs faces noires. Il est donc nécessaire d'examiner de combien de façons ces faces noires peuvent être combinées entre elles.

Il est clair qu'avec q dés on peut obtenir de t^q manières que chaque dé présente une face noire; car supposons que nous ayons trois dés C, D, E ayant chacun 4 faces blanches et 2 faces noires, alors les 2 faces noires de C peuvent se présenter avec les deux faces noires de D de 4 ou t t façons, et chacune de ces t t combinaisons peut se présenter avec une des t ou 2 faces noires de E. Nous aurons donc 8 ou t^3, ou comme $q = 3$, t^q pour le nombre total des combinaisons possibles.



Faces blanches (nombre des combinaisons possibles).	Faces noires.	Chances.	
1	t^q	t^q	1
$s.\frac{q}{1}$	t^{q-1}	$\frac{q}{1} \times t^{q-1}.s$	$q-1$
$s^2.\frac{q.\overline{q-1}}{1.2}$	t^{q-2}	$\frac{q.\overline{q-1}}{1.2} \times t^{q-2}.s^2$	d'obtenir $q-2$ faces noires.
$s^3.\frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}}{1.2.3}$	t^{q-3}	$\frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}}{1.2.3} \times t^{q-3}.s^3$	$q-3$
$s^4.\frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}.\overline{q-3}}{1.2.3.4}$	t^{q-4}	$\frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}.\overline{q-3}}{1.2.3.4} \times t^{q-4}.s^4$	$q-4$

Le nombre total des coups qu'on peut faire avec q dés est p^q. La part de B est alors représentée par la série suivante

$$t^q + \frac{q}{1} \times t^{q-1}.s + \frac{q.\overline{q-1}}{1.2} \times t^{q-2}.s^2 + \frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}}{1.2.3} \times t^{q-3}.s^3 + \frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}.\overline{q-3}}{1.2.3.4} \times t^{q-4}.s^4 + \text{etc.},$$

le tout divisé par p^q. Le nombre des termes doit être m. Ce qui reste de l'unité constitue la part de A. On peut également obtenir cette part en remplaçant partout t par s, s par t, m par n.

Nous avons résolu le même problème par une voie différente, et nous avons trouvé ainsi pour la part de B

$$p^{m-1} + n \times s \times p^{m-2} + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} s s \times p^{m-3} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} \times s^3 . p^{m-4} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4} \times s^4 \times p^{m-5} + \text{etc.},$$

le tout multiplié par t^n et divisé par p^{m+n-1}. Le nombre des termes doit être égal à celui des unités de m. Ce qui reste de l'unité constitue la part de A. On peut également obtenir cette part en remplaçant m par n, n par m, t par s, s par t.

Et en supposant les chances égales, donc $a = b = 1$, on trouve pour la part de B par la première formule

$$1 + \frac{q}{1} + \frac{q.\overline{q-1}}{1.2} + \frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}}{1.2.3} + \frac{q.\overline{q-1}.\overline{q-2}.\overline{q-3}}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

le tout divisé par 2^q. Le nombre des termes doit être égal à m. Mais en prenant un nombre n de termes, on a la part de A.

Mais si l'on suppose les chances égales dans la deuxième formule, on trouve pour la part de B

$$1 + \frac{n}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} \times \frac{1}{4} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} \times \frac{1}{8} + \text{etc.},$$

le tout divisé par 2^n. Le nombre des termes doit être m. Et la part de A devient

$$1 + \frac{m}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{m \cdot m+1}{1 \cdot 2} \times \frac{1}{4} + \frac{m \cdot m+1 \cdot m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{1}{8} + \text{etc.},$$

le tout divisé par 2^m. Le nombre des termes doit être n.

Huitième Exemple.

Deux personnes A et B jouent avec deux dés. A effacera un trait lorsqu'on aura jeté 8 points, et B lorsqu'on en aura jeté 6. A doit effacer en tout 4 traits et B 5 traits. On trouvera alors que la chance de A est à celle de B comme 163 est à 93, c. à. d. A a droit à $\frac{163}{256}$ de l'enjeu, et B au reste.

Neuvième Exemple.

Mais si A a le droit d'effacer un trait lorsqu'on aura jeté dix points, et B lorsqu'on en aura jeté 11, et que A doit effacer en tout 4 traits et B 5 traits comme précédemment, alors $m = 4$, $n = 5$, $s = 3$, $t = 2$, $q = 8$ et $p = 5$. On trouvera que la chance de A est à celle de B comme 322785 est à 67840.

Dixième Exemple.

A et B jouent avec 3 dés pour gagner une somme d'argent déterminée. Ils déposent 24 fiches. Chaque fois qu'on aura jeté 11 points, A prendra une des fiches, et chaque fois qu'on aura jeté 14 points, B en prendra une. Celui qui a le premier 12 fiches, gagne l'enjeu. On trouvera que la chance de A est à celle de B comme 211552297122453884060370544 est à 18033395764527611421850000, c. à. d. environ comme 47 est à 4.

Onzième Exemple.

Supposons qu'il y ait 3 joueurs et que chacun d'eux doive effacer un certain nombre de traits, à savoir A 1 trait, B n traits, C m traits. On sait que le nombre des chances de A d'effacer un trait est a, celui de B b et celui de C c. Soit $a + b + c = d$.

On trouve par notre formule pour la part de B

$$d^{m-1} + \frac{n}{1} \times c \times d^{m-2} + \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} cc \times d^{m-3} + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times c^3 \times d^{m-4} + \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times c^4 \times d^{m-5} + \text{etc.},$$

le tout multiplié par b^n et divisé par d^{m+n-1}. Si l'on remplace ensuite m par n, n par m, b par c, c par b, on obtient

la part de C. Ce qui reste de l'unité constitue la part de A.

Douzième Exemple.

Trois personnes jouent. A doit encore effacer 1 trait, B 8 traits et C 10 traits. On demande la part de chacun d'eux, lorsque leurs chances d'effacer un trait sont les mêmes.

Le calcul arithmétique, d'après la formule précédente, est le suivant :

$$\frac{10.11.\overset{4}{12}.13.14.\overset{5}{15}.16.8.9.10.11.12.13.\overset{2}{14}.15.16}{1.2.3.4.5.\underset{2}{6}.7.1.2.3.4.5.6.7.8.9} \left.\right\} \text{jusqu'au } (10-1)^{\text{ième}} \text{ terme.}$$

1 —	2187	2187
— 10		
10 —	729	7290
— $\frac{11}{2}$		
55 —	243	13365
— 4		
220 —	81	17820
— $\frac{13}{4}$		
715 —	27	19305
— $\frac{14}{5}$		
2002 —	9	18018
— $\frac{5}{2}$		
5005 —	3	15015
— $\frac{16}{7}$		
11440 —	1	11440
		C 104440

1 —	19683	19683
8 —	6561	52488
36 —	2187	78732
120 —	729	87480
330 —	243	80190
792 —	81	64152
1716 —	27	46332
3432 —	9	30888
6435 —	3	19305
11440 —	1	11440
		B 490690

Élevez 3 à la puissance 17 (ce dernier nombre est la somme des traits que B et C doivent effacer —1) ; il vient 129140163. Retranchez-en les parts de B et de C, il restera 128545033 pour la part de A.

Treizième Exemple.

Trois personnes jouent avec 2 dés ordinaires. A effacera un trait lorsqu'on aura jeté 11 points, B lorsqu'on en aura jeté 10, et C lorsqu'on en aura jeté 9. A doit encore effacer 1 trait, B 2 traits, C 3 traits. On demande quelle est la part de l'enjeu qui revient à chacun d'eux.

Alors $m = 3$, $n = 2$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, donc $d = 9$. On trouve pour A 400, pour B 201, et pour C 128.

Quatorzième Exemple.

On demande quelle chance on a de jeter avec q dés ayant p faces chacun, un nombre b de six, de quatres etc.

Si l'on voulait jeter tous les six qui sont marqués sur les dés à trois six près, on aurait $q - 3 = b$ ou $3 = q - b$. Prenez alors $s = p - 1$, ce qui donne

$$\overline{p-1}^{\,q-b} \times \frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.}$$

Le numérateur et le dénominateur de cette dernière fraction doivent avoir chacun un nombre de termes égal à $q-b$.

Quinzième Exemple.

Supposons que nous parions de jeter trois six, ni plus ni moins, avec 6 dés ordinaires. Nous aurons alors 12500 chances en notre faveur. Le nombre total des chances que présentent les dés, est 46656. Il y a donc 34156 chances qui nous font perdre.

Seizième Exemple.

Supposons qu'on parie de jeter au moins b six avec q dés ayant p faces chacun, marquées 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. On gagnera donc le jeu lorsqu'on jette plus de b six aussi bien que lorsqu'on en jette b.

On trouve pour la chance la formule suivante

$$\overline{p-1}^{\,q-b} \times \frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.} + \overline{p-1}^{\,q-b-1} \times$$

$$\frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.} + \overline{p-1}^{\,q-b-2} \times \frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.} + \text{etc.}$$

Les génitures $\frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc. doivent avoir dans le numérateur aussi bien que dans le dénominateur un nombre de termes égal

au nombre d'unités que contiennent les exposants qui les précèdent, donc le premier $(q-b)$, le second $(q-b-1)$, etc. La série entière doit avoir un nombre de termes égal à celui des unités comprises dans $(q-b+1)$. On peut dire aussi qu'il faut continuer la série jusqu'à ce que (q—b—le nombre ordinaire) s'annule.

Dix-septième Exemple.

Si l'on a 5 dés ordinaires et qu'on parie de jeter au moins 2 six, nous avons $p-1=5$, $q=5$ et $b=2$.

On trouve alors 1526 chances en faveur de celui qui a fait le pari. Et s'il s'agit de jeter au moins 1 six avec 5 dés, 4651 des 7776 chances que présentent les dés sont en faveur de celui qui jette les dés.

On peut aussi se servir de la série suivante

$$p^q - \overline{p-1}^q - \frac{q}{1} \times \overline{p-1}^{q-1} - \frac{q \cdot \overline{q-1}}{1 \cdot 2} \times \overline{p-1}^{q-3} -$$

$$\frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \overline{p-1}^{q-3} - \text{etc.}$$

Le nombre des termes doit être $(b+1)$. Cette série exprime également la part de celui qui parie de jeter du premier coup au moins b six, b quatres, etc. avec q dés ayant chacun p faces. La première formule est la plus commode lorsque b diffère peu de q, et la dernière lorsque b diffère peu de l'unité.

Dix-huitième Exemple.

A et B jouent un jeu où l'on se propose d'effacer un certain nombre de traits. La chance qu'a le joueur A d'effacer un trait surpasse celle de B d'autant, qu'il joue contre lui sans avantage ni désavantage, lorsqu'il a encore m traits à effacer et B 1 seul trait. On demande le rapport des chances d'effacer un trait qu'a chacun des deux joueurs.

Posons $s=1$. Alors (Septième Exemple) la somme des chances de A et de B est $(1+t)^q$. La part de A doit consister en un seul terme, à savoir s^q qui est égal à 1. Et comme les chances des deux joueurs sont égales on a $(1+t)^q = 2$ ou $(1+t) = \sqrt[q]{2}$ ou $t = -1 + \sqrt[q]{2}$. Or $m = q$. La chance de A d'effacer un trait est donc à celle de B comme 1 est à $-1+\sqrt[m]{2}$.

Dix-neuvième Exemple.

Si A avait encore 7 traits à effacer et B un seul trait, on trouve aisément en se servant de logarithmes, que la chance de A serait à celle de B comme 2200 est à 229.

Vingtième Exemple.

Quelqu'un parie de jeter du premier coup avec q dés ayant chacun p côtés, a as, b deux, c trois, d quatres, e cinqs, f six, etc.

Posons $q-a=n$, $q-a-b=o$, $q-a-b-c=s$, $q-a-b-c-d=t$, et les restes suivants $=v$, $=w$, etc. La part du joueur 1) est donc exprimée, d'après notre premier Problème, par la formule suivante

$$\overbrace{\frac{q \,.\, q-1 \,.\, q-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\text{ etc.}}^{a \text{ termes}} \times \overbrace{\frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\text{ etc.}}^{b \text{ termes}} \times \overbrace{\frac{o \,.\, o-1 \,.\, o-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\text{ etc.}}^{c \text{ termes}} \times$$

$$\overbrace{\frac{s \,.\, s-1 \,.\, s-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\text{ etc.}}^{d \text{ termes}} \times \overbrace{\frac{t \,.\, t-1 \,.\, t-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\text{ etc.}}^{e \text{ termes}} \times \overbrace{\frac{v \,.\, v-1 \,.\, v-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\text{ etc.}}^{\text{termes } f} \times \text{ etc.}$$

La preuve de cette formule est évidente. Car si l'on veut avec 7 dés ordinaires jeter du premier coup 4 as, 2 cinqs et 1 six, il faut chercher d'abord de combien de façons différentes on peut jeter quatre des sept as ; on trouve ainsi le premier terme de la formule ; restent alors encore 3 dés, c.à.d. $q-a$ ou n dés ; il faut examiner de combien de façons on peut obtenir avec ces dés les 2 cinqs ; ceci donne le deuxième terme de la formule et ainsi de suite.

Vingt-et-unième Exemple.

Si nous voulons parier de jeter du premier coup avec 9 dés 4 as, 2 six, 2 cinqs et 1 quatre, on trouvera qu'il y a 3780 chances en notre faveur.

Vingt-deuxième Exemple.

On demande de jeter avec q dés ayant chacun p faces, b faces désignées d'avance, ni plus ni moins.

En ce cas il faut poser dans le 20ième Exemple $a = b = c$ etc. $= 1$. La formule se réduit alors à

---

1) Ou plutôt : le nombre de chances favorables au joueur. N. d. tr.

$$q \, . \, \overline{q - 1} \, . \, \overline{q - 2} \, . \, \overline{q - 3} \, . \, \overline{q - 4}, \text{ etc.}$$

Quant aux dés qui ne doivent pas présenter de faces désignées, ils sont au nombre de $q - b$; dans ces conditions $(p - b)$ faces seulement de chacun d'eux peuvent se présenter. La formule entière qui détermine la chance qu'on a de jeter du premier coup b faces données, ni plus ni moins, est donc

$$q \, . \, \overline{q - 1} \, . \, \overline{q - 2} \, . \, \overline{q - 3}, \text{ etc. } \times \overline{p - b}^{\,q-b}.$$

Le nombre des premiers facteurs $q \, . \, \overline{q - 1}$, etc. doit être égal à celui des unités comprises dans b.

Vingt-troisième Exemple.

Si nous voulions parier de jeter 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec 6 dés ordinaires, 720 chances seraient en notre faveur, ce que l'on trouve aussi par le vingtième Exemple et par le sixième Problème, vu qu'on a ici précisément toutes les faces du dé.

Vingt-quatrième Exemple.

Supposons qu'on jette 5 dés ordinaires, et qu'on gagne lorsqu'on jette un 5 et un 6, tandis que les autres dés présentent les faces 1, 2, 3 ou 4. Alors $q = 5$, $p = 6$ et $b = 2$. Les chances de gagner sont donc au nombre de 1280.

Sixième Problème.

On demande quelle chance on a de jeter en q coups au moins b faces données avec un dé qui a p faces.

On voit par le 17ième Exemple qu'il y a $p^q - \overline{p - 1}^{\,q}$ chances de jeter au moins une face donnée. S'il s'agit de jeter deux faces données, on a moins de chances. Pour trouver la différence, supposez que chaque dé ait une face de moins. On trouve alors $\overline{p - 1}^{\,q} - \overline{p - 2}^{\,q}$. Si nous retranchons cette expression de $p^q - \overline{p - 1}^{\,q}$, il reste $p^q - 2 \times \overline{p - 1}^{\,q} + \overline{p - 2}^{\,q}$. C'est là le nombre des chances s'il faut jeter 2 faces données. S'il s'agit de jeter trois faces données, on suppose de nouveau, en se servant de la dernière formule, que chaque dé ait une face de moins. On a alors $\overline{p - 1}^{\,q} - 2 \times \overline{p - 2}^{\,q} + \overline{p - 3}^{\,q}$. Si nous retranchons cette expression de la précédente, il reste $p^q - \overline{p - 1}^{\,q} \times 3 + 3 \times \overline{p - 2}^{\,q} - \overline{p - 3}^{\,q}$.

C'est là le nombre des chances qu'on a de jeter 3 faces données. Les facteurs numériques des termes sont les „génitures" ordinaires. La part qui nous est due 1), lorsque nous voulons jeter au moins b faces données en q coups, est donc exprimée par la formule suivante

$$p^q - \frac{b}{1} \times \overline{p-1}^q + \frac{b \,.\, \overline{b-1}}{1 \,.\, 2} \times \overline{p-2}^q - \frac{b \,.\, \overline{b-1} \,.\, \overline{b-2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \times \overline{p-3}^q + \frac{b \,.\, \overline{b-1} \,.\, \overline{b-2} \,.\, \overline{b-3}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \times \overline{p-4}^q - \text{etc.}$$

Les signes sont alternativement + et —, et le nombre des termes est égal à celui des unités comprises dans (b + 1).

Premier Exemple.

Si nous parions de jeter en 4 coups avec un dé ordinaire au moins 2 faces données, p. e. 1 et 2, il y a 302 chances en notre faveur.

Deuxième Exemple.

Si nous nous proposons de jeter en 12 coups avec un dé ordinaire toutes les six faces du dé, il y a 953029445 sur 2176782336 chances en notre faveur; ce qui fait voir qu'on ne doit pas parier de jeter toutes les 6 faces en 12 coups, en mettant 1 contre 1; mais si l'on parie de les jeter en 14 coups, on a un léger avantage.

Troisième Exemple.

Si l'on pariait de jeter en 40 coups avec un dé de 36 faces au moins 2 faces données, ou bien de jeter en 40 coups avec 2 dés ordinaires 2 as et 2 deux, on trouve par les logarithmes qu'il y aurait à-peu-près 1081 chances de gagner contre 1302 chances de perdre.

Quatrième Exemple.

Pour trouver en combien de coups on pourrait parier de jeter b faces données, si l'on voulait mettre r contre s, j'ai suivi à-peu-près la même voie que M. DE MOIVRE 2). Toutefois j'estime que notre formule s'approche encore davantage de la vraie valeur et que nos expressions sont plus générales.

1) Voir la note précédente. (N. d. tr.)

2) A. DE MOIVRE publia en 1711 le traité „De mensura sortis sive de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus". (N. d. tr.)

Supposons que p, p—1, p—2, etc. dans la formule précédente soient en progression géométrique. Cela sera à-peu-près vrai, lorsque p = 6. Les nombres sont alors 6, 5, 4, 3 etc. mais ceux-ci diminuent plus rapidement que dans une progression géométrique, dont le premier terme est 6 et le second 5; car cette progression est 6, 5, $4\frac{1}{6}$, $3\frac{17}{36}$, etc. On trouve donc par là un nombre de chances favorables supérieur au nombre qu'on devait trouver, et par conséquent un nombre de coups moindre. Pour corriger ce défaut, j'ai admis que les nombres décroissent suivant la formule $\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)^q}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^q}$.

Posant cette expression = y, on a par ce qui précède

$$p^q - \frac{b}{1}\, p^q y + \frac{b \cdot \overline{b-1}}{1 \cdot 2} \times p^q yy - \frac{b \cdot \overline{b-1} \cdot \overline{b-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times p^q y^3 \times$$

$\frac{b \cdot \overline{b-1} \cdot \overline{b-2} \cdot \overline{b-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times p^q y^4$ — etc., le tout divisé par p^q, doit être égal à $\frac{r}{r+s}$. Autrement dit

$$1 - \frac{b}{1} \times y + \frac{b \cdot \overline{b-1}}{1 \cdot 2} \times yy - \frac{b \cdot \overline{b-1} \cdot \overline{b-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times y^3 +$$
$$\frac{b \cdot \overline{b-1} \cdot \overline{b-2} \cdot \overline{b-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times y^4 - \text{etc.} = \frac{r}{r+s}.$$

La somme de (b + 1) termes de cette série est $\overline{1-y}^{\,b}$ (d'après M. NEWTON ou M. JEAN BERNOULLI. On trouve la même chose dans l'„Analyse démontrée," par P. C. REINEAU, ou dans les „Oeuvres posthumes" du Marquis DE l'HOSPITAL). Donc

$$\overline{1-y}^{\,b} = \frac{r}{r+s}$$

ou $(1-y) = \sqrt[b]{\frac{r}{r+s}}$. Donc

$$1 - \sqrt[b]{\frac{r}{r+s}} = y = \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)^q}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^q}$$

ou

$$\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)^q}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^q} = \frac{1}{1-\sqrt[b]{\frac{r}{r+s}}}.$$

En prenant le logarithme des deux membres, on trouve

$$q = \frac{\log \frac{1}{1 - \sqrt[b]{\frac{r}{r+s}}}}{\log \left(p + \frac{1}{2}\right) - \log \left(p - \frac{1}{2}\right)}$$

C'est là le nombre de coups, qu'il s'agissait de trouver.

Cinquième Exemple.

On pourra parier 1 contre 1 de jeter en 13 à 14 coups avec un dé ordinaire toutes les six faces. M. DE MOIVRE trouve que c'est en 12 à 13 coups.

Sixième Exemple.

On pourrait parier 1 contre 1 de jeter en 80 coups environ six faces désignées avec un dé de 36 faces ou de jeter avec 2 dés ordinaires toutes les combinaisons de deux faces identiques.

Septième Exemple.

Nous avons trouvé que lorsqu'il s'agit de jeter six faces désignées avec un dé de 216 faces, ou de jeter avec 3 dés ordinaires tous les 6 coups triples, savoir 3 as, 3 deux, etc., on doit pouvoir faire, si l'on a parié 1 contre 1, 478 à 479 coups. M. DE MOIVRE trouve 477 coups.

Huitième Exemple.

Si dans le sixième Exemple on voulait mettre 1 contre 10, on trouvera

$$q = \frac{\log \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{11}}}}{\log 36\frac{1}{2} - \log 35\frac{1}{2}}$$

Si l'on trouve quelque difficulté à chercher le logarithme de ce nombre et d'abord à tirer la $\sqrt[6]{}$ de $\frac{1}{11}$, que l'on sache qu'il faut opérer de la façon suivante. Ecrivez 18 zéros dans le numérateur aussi bien que dans le dénominateur de cette fraction. Alors la racine 6ième du numérateur est précisément 1000. Cherchez ensuite le logarithme de 11 suivi de 18 zéros; c'est 190413927. Divisez

ce nombre par 6; il vient 31735654. Le nombre qui correspond au logarithme de la racine est environ $1491\frac{7}{23}$. Par conséquent $\sqrt[6]{\frac{1}{11}} = \frac{1000}{1491\frac{7}{23}}$ ou $\frac{23000}{34300}$ ou $\frac{230}{343}$. Donc $1 - \sqrt[6]{\frac{1}{11}} = \frac{113}{343}$. Et l'on a $\frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{11}}} = \frac{343}{113}$. Le logarithme de 343 est 25352941 et celui de 113 est 20530784. La différence, c'est-à-dire le logarithme qui figure au numérateur est 4822157. Pour trouver le nombre par lequel celui-ci doit être divisé, retranchez log. 71 de log. 73. Le reste sera 120646. On trouve de cette façon environ 40 coups. Et si l'on ne voulait mettre qu'un contre 100, on trouverait de la même façon 22 à 23 coups.

Si nous avons un nombre donné de dés et que nous nous proposons de jeter avec ces dés un certain nombre de fois des nombres de points désignés d'avance, et cela en un nombre donné de coups, on demande quelle chance nous aurons d'y réussir. Supposons que le nombre total des chances que présentent les dés soit c, et a le nombre des chances qui peuvent nous donner la première fois un des nombres de points désignés, b celui des chances que nous avons de ne pas jeter un de ces nombres du premier coup. Alors $a + b = c$. Supposons que nous fassions x coups et que nous ayons parié de jeter deux fois un nombre donné de points. Nous avons $\frac{a}{c}$ chances de jeter du premier coup un des nombres donnés. Si l'on suppose que nous jetons la première fois un des nombres donnés, nous aurons encore $(x - 1)$ coups pour jeter le second nombre donné. La part de l'enjeu qui nous revient alors est $1 - \frac{b^{x-1}}{c^{x-1}}$ d'après le deuxième Problème. Si nous ne jetons du premier coup aucun des nombres désirés, nous avons $\frac{ab}{cc}$ chances d'en jeter un du deuxième coup; nous avons donc alors droit à $1 - \frac{b^{x-2}}{c^{x-2}}$ de l'enjeu, et l'on peut continuer à raisonner ainsi comme on le voit par la table ci-dessous, jusqu'à ce qu'on a $(x - 1)$ termes; car si nous ne jetons pas le premier nombre demandé en $(x - 1)$ coups, nous perdons notre pari.

$$\begin{array}{lll}
\frac{a}{c} & 1 - \frac{b^{x-1}}{c^{x-1}} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{c} - \frac{b^{x-1}}{c^{x}} \times a. \\ \frac{ab}{cc} - \frac{b^{x-1}}{c^{x}} \times a. \\ \frac{abb}{c3} - \frac{b^{x-1}}{c^{x}} \times a. \\ \frac{ab3}{c4} - \frac{b^{x-1}}{c^{x}} \times a. \end{array} \right. \\
\frac{ab}{cc} & 1 - \frac{b^{x-2}}{c^{x-2}} & \\
\frac{abb}{c3} & 1 - \frac{b^{x-3}}{c^{x-3}} & \\
\frac{ab3}{c4} & 1 - \frac{b^{x-4}}{c^{x-4}} &
\end{array}$$

Etc. jusqu'à $(x - 1)$.

La première colonne contient des nombres qui forment une progression géométrique. Dans la seconde tous les termes sont identiques. La somme est donc

$$1 - \frac{b^{x-1}}{c^{x-1}} - x - 1 \times \frac{ab^{x-1}}{c^{x}}$$

ou, comme $a = c - b$, la part qui nous est due est $1 - \frac{axb^{x-1} + b^{x}}{c^{x}}$.

Et en continuant de la même manière on trouvera la part qui nous est due, lorsque nous aurons parié de jeter trois fois ou 4 ou 5 fois etc., en un nombre donné de coups des nombres de points désignés d'avance, et en général lorsque nous parions de jeter en x coups au moins p fois quelques nombres donnés de points.

Mais on peut obtenir le résultat bien plus facilement, si l'on observe que les conditions de ce jeu sont équivalentes à celles du jeu suivant. Supposons que deux joueurs A et B jouent un jeu où il s'agit d'effacer quelques traits. A doit effacer encore p traits avant de pouvoir gagner le jeu, et B encore $(x - p + 1)$ traits. A a a chances d'effacer un trait, et B b chances; $a + b = c$. On trouve alors par le septième Exemple du cinquième Problème que la part de B est égale à la somme de la série suivante

$$b^{x} + \frac{x}{1} \times b^{x-1} a + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times b^{x-2} a^{2} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times b^{x-3} a^{3} + \text{etc.},$$

le tout divisé par c^{x}. Le nombre des termes doit être q. En retranchant ce nombre de l'unité, nous obtenons un reste qui représente la part de A, savoir

$$c^{x} - \frac{x}{1} \times b^{x-1} a - \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times b^{x-2} a^{2} - \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times b^{x-3} a^{3} - \text{Etc.},$$

le tout divisé par c^{x}. Le nombre des termes doit être $(p + 1)$.

C'est là le résultat qu'il fallait trouver, c.à.d. la part de celui qui parie de jeter en x coups au moins p fois un nombre donné de points.

Neuvième Exemple.

Si nous nous proposons de jeter en 50 coups avec 2 dés ordinaires 2 fois 2 six, la part qui nous est due est

$$1 - \frac{50 \times 35^{49} + 35^{50}}{36^{50}},$$

ce qui, calculé à l'aide de logarithmes, prend une valeur de $\frac{1163}{28631}$ environ.

Si l'on demandait en combien de coups nous pourrions parier, 1 contre 1, de jeter 2 fois, 3 fois, etc. quelques nombres donnés de points, on pourrait, pour ne pas tâtonner, se servir des limites de M. A. DE MOIVRE, qui sont les suivantes. Si l'on doit jeter deux fois un nombre donné de points, x est plus petit que $\frac{3\,b}{a}$ et plus grand que $\frac{1678\,b}{1000\,a}$; de même pour trois fois, x est plus petit que $\frac{5\,b}{a}$, mais plus grand que $\frac{107\,b}{40\,a}$, pour quatre fois x doit être plus petit que 7 q et plus grand que $\frac{36719\,b}{10000\,a}$, pour cinq fois x est plus petit que 9 q et plus grand que $\frac{467\,b}{100\,a}$, mais s'il s'agit de jeter six fois un nombre donné de points, x est plus petit que 11 q et plus grand que $\frac{5668\,b}{1000\,a}$. Toutefois ces limites ont le défaut que si le résultat consiste en un petit nombre de coups, on ne trouve pas le nombre exact.

Dixième Exemple.

On demande en combien de coups nous pourrions nous proposer de jeter 2 fois 12 points avec 2 dés. En ce cas $\frac{b}{a} = 35$. Multipliez ce nombre par $\frac{1678}{1000}$; il vient $58\,\frac{73}{100}$. Le nombre demandé serait donc entre 58 et 59; mais en réalité il est supérieur à 60.

Onzième Exemple.

En combien de coups pourrait-on parier de jeter 2 fois 15 points avec 6 dés ordinaires? Il y a 1666 coups qui peuvent donner 15 points, et 44990 coups qui donnent un nombre de points plus grand ou plus petit. Multipliez 44990 par 1678 et divisez le

résultat par le produit de 1000 et de 1666. On trouvera ainsi que le nombre de coups est 45 à 46, quoiqu'en réalité ce nombre soit entre 46 et 47.

Douzième Exemple.

On demande en combien de coups l'on pourrait parier de jeter avec 2 dés ordinaires tous les coups doubles, à savoir les as d'abord, ensuite les deux, puis les trois, etc. jusqu'à ce qu'on jette enfin les deux six. Alors $\frac{b}{a} = 35$. Multipliez ce nombre par $\frac{5668}{1000}$. Il viendra $198\frac{19}{50}$. Le nombre demandé est donc entre 198 et 199.

Treizième Exemple.

Combien de coups devra-t-on nous accorder, si nous parions 1 contre 1 comme précédemment, de jeter deux fois les trois six avec trois dés? On trouve par la méthode précédente: 360 à 361 coups.

Septième Problème.

Quelqu'un a q dés ayant chacun p faces. On demande combien de chances il a de jeter b points.

En posant $b - q = a$, on trouve que le nombre demandé est la somme de la série suivante

$$\overbrace{\frac{q \times \overline{q+1} \times \overline{q+2} \times \overline{q+3} \times \overline{q+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}\ \text{etc.}}^{a \text{ termes}} - \overbrace{\frac{q \times \overline{q+1} \times \overline{q+2} \times \overline{q+3} \times \overline{q+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}}^{a - p \text{ termes}}$$

$$\overbrace{\text{etc.} \times \frac{q}{1} + \frac{q \times \overline{q+1} \times \overline{q+2}}{1 \times 2 \times 3}\ \text{etc.}}^{a - 2p \text{ termes}} \times \frac{q \times \overline{q-1}}{1 \times 2} -$$

$$\overbrace{\frac{q \times \overline{q+1} \times \overline{q+2} \times \overline{q+3} \times \overline{q+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}\ \text{etc.}}^{a - 3p \text{ termes}} \times \frac{q \times \overline{q-1} \times \overline{q-2}}{1 \times 2 \times 3} +$$

$$+ \overbrace{\frac{q \times \overline{q+1} \times \overline{q+2}}{1 \times 2 \times 3}\ \text{etc.}}^{a - 4p \text{ termes}} \times \frac{q \times \overline{q-1} \times \overline{q-2} \times \overline{q-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\ \text{etc.}$$

Mais cette formule peut être écrite d'une façon différente. Nous savons d'abord que le dernier terme du numérateur de la première fraction sera $(b - 1)$. Or, il est certain que tous les nombres du dénominateur disparaîtront à partir du nombre p, vu qu'on peut les rayer en même temps que les nombres correspondants du numérateur. Restent alors les derniers termes du numérateur et les premiers du dénominateur. La première fraction se change donc en $\frac{\overline{b-1} \times \overline{b-2}}{1 \times 2}$ etc. Le nombre des termes est $p - 1$. En-

suite on pourra opérer de la même manière sur toutes les autres fractions. Posant alors b — 1 — p = d, d — p = e, e — p = f, f — p = g, etc. on trouvera la série suivante, dans laquelle chaque fraction qui est suivie de etc. doit avoir un nombre de termes égal à celui des unités comprises dans q — 1:

$$\frac{\overline{b-1}\times\overline{b-2}\times\overline{b-3}}{1\times2\times3}\text{ etc.} - \frac{d\times\overline{d-1}\times\overline{d-2}}{1\times2\times3}\text{ etc.}\times\frac{q}{1} + \frac{e\times\overline{e-1}\times\overline{e-2}}{1\times2\times3}\text{ etc.}\times\frac{q\times\overline{q-1}}{1\times2} - \frac{f\times\overline{f-1}\times\overline{f-2}}{1\times2\times3}\text{ etc.}\times\frac{q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}}{1\times2\times3} + \frac{g\times\overline{g-1}\times\overline{g-2}}{1\times2\times3}\text{ etc.}\times\frac{q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}\times\overline{q-3}}{1\times2\times3\times4} - \text{etc.}$$

et de cette façon nous sommes parvenus à la formule qui se trouve aussi dans la „Mensura Sortis" 1), où elle figure (quoiqu'on n'en donne ancune explication) comme un Lemme, appartenant au 5ième Problème, qui correspond avec notre 2ième Problème.

Premier Exemple.

Si nous parions de jeter 12 points avec 5 dés ordinaires, on trouvera qu'il y a 305 chances en notre faveur.

Deuxième Exemple

Et s'il s'agit de jeter 24 points avec 9 dés, on trouvera un nombre de 277464 chances. A l'aide de cette formule on peut aisément construire les tables suivantes qui donnent tous les coups possibles avec un nombre de dés variant de 2 à 9.

Deux dés		Trois dés		Quatre dés	
Coups	Points	Coups	Points	Coups	Points
1	2 ou 12	1	3 ou 18	1	4 ou 24
2	3 ou 11	3	4 ou 17	4	5 ou 23
3	4 ou 10	6	5 ou 16	10	6 ou 22
4	5 ou 9	10	6 ou 15	20	7 ou 21
5	6 ou 8	15	7 ou 14	35	8 ou 20
6	7	21	8 ou 13	56	9 ou 19
		25	9 ou 12	80	10 ou 18
		27	10 ou 11	104	11 ou 17
				125	12 ou 16
				140	13 ou 15
				146	14

1 Voir p. 89, note. N. d. tr.)

Cinq dés

Coups	Points
1	5 ou 30
5	6 ou 29
15	7 ou 28
35	8 ou 27
70	9 ou 26
126	10 ou 25
205	11 ou 24
305	12 ou 23
420	13 ou 22
540	14 ou 21
651	15 ou 20
735	16 ou 19
780	17 ou 18

Six dés

Coups	Points
1	6 ou 36
6	7 ou 35
21	8 ou 34
56	9 ou 33
126	10 ou 32
252	11 ou 31
456	12 ou 30
756	13 ou 29
1161	14 ou 28
1666	15 ou 27
2247	16 ou 26
2856	17 ou 25
3431	18 ou 24
3906	19 ou 23
4221	20 ou 22
4332	21

Sept dés

Coups	Points
1	7 ou 42
7	8 ou 41
28	9 ou 40
84	10 ou 39
210	11 ou 38
462	12 ou 37
917	13 ou 36
1667	14 ou 35
2807	15 ou 34
4417	16 ou 33
6538	17 ou 32
9142	18 ou 31
12117	19 ou 30
15267	20 ou 29
18327	21 ou 28
20993	22 ou 27
22967	23 ou 26
24017	24 ou 25

Huit dés

Coups	Points
1	8 ou 48
8	9 ou 47
36	10 ou 46
120	11 ou 45
330	12 ou 44
792	13 ou 43
1708	14 ou 42
3368	15 ou 41
6147	16 ou 40
10480	17 ou 39
16808	18 ou 38
25488	19 ou 37
36688	20 ou 36
50288	21 ou 35
65808	22 ou 34
82384	23 ou 33
98813	24 ou 32

Neuf dés

Coups	Points
1	9 ou 54
9	10 ou 53
45	11 ou 52
165	12 ou 51
495	13 ou 50
1287	14 ou 49
2994	15 ou 48
6354	16 ou 47
12465	17 ou 46
22825	18 ou 45
39303	19 ou 44
63999	20 ou 43
98979	21 ou 42
145899	22 ou 41
205560	23 ou 40
277464	24 ou 39
359469	25 ou 38

Huit dés

Coups	Points
113688	25 ou 31
125588	26 ou 30
133288	27 ou 29
135954	28

Neuf dés

Coups	Points
447669	26 ou 37
536569	27 ou 36
619569	28 ou 35
689715	29 ou 34
740619	30 ou 33
767394	31 ou 32

Huitième Problème. 1)

Quelqu'un a un dé à p faces, marquées 1, 2, 3, 4, 5, etc. Il tâchera d'obtenir précisément le plus grand nombre de points marqué sur le dé. Nous voulons dire qu'il gagnera le jeu si le premier nombre qu'il jette, ou la somme du premier et du second nombre, ou bien la somme des trois premiers nombres, etc. est précisément égale au plus grand nombre de points marqué sur le dé; mais au moment où cette somme surpasse le nombre en question, il aura perdu le jeu. On demande quelle sera sa chance de gagner.

À la fin de p coups cette personne aura sûrement gagné ou perdu le jeu. Pour gagner le jeu en p coups, on devrait jeter 1 point p fois l'une après l'autre. Si nous supposons l'enjeu égal à 1, la part qui nous revient en vertu de la chance que nous avons de gagner le jeu en p coups est exprimée par $\frac{1}{p^p}$; celle qui correspond à la chance de gagner le jeu en (p — 1) coups par $\frac{p-1}{2} \times p$ divisé par p^p; en (p — 2) coups par $\frac{\overline{p-1} \times \overline{p-2}}{1 \times 2} \times p^2$, divisé par p^p et ainsi de suite. Le nombre total des termes doit être égal à celui des unités contenues dans le nombre p:

$$1 + \frac{\overline{p-1}}{1} \times p + \frac{\overline{p-1} \times \overline{p-2}}{1 \times 2} \times p^2 + \frac{\overline{p-1} \times \overline{p-2} \times \overline{p-3}}{1 \times 2 \times 3} \times p^3 + \frac{\overline{p-1} \times \overline{p-2} \times \overline{p-3} \times \overline{p-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times p^4 + \text{etc.},$$

le tout divisé par p^p.

La somme des termes du numérateur est $\overline{1+p}^{\,p-1}$. Celui qui

1) STRUYCK, par erreur, a écrit: „Septième Problème”, et a persévéré dans cette erreur jusqu'au dernier Problème. (N. d. tr.)

jette les dés a donc droit à la partie $\frac{1+p^{p-1}}{p^p}$ de l'enjeu, et son adversaire à ce qui reste de l'unité.

Premier Exemple.

Si l'on avait parié de jeter six avec un dé ordinaire, la part du joueur serait $\frac{16807}{46656}$, c. à. d. il devrait mettre 16807 contre 29849 pour jouer sans avantage ni désavantage.

Deuxième Exemple.

Et si l'on a un dé à 12 faces, on trouve aisément par les logarithmes que la part du joueur est $\frac{448}{2229}$, et de même $\frac{1325}{10486}$ pour un dé à 20 faces. Ce qui reste de l'unité constitue la part de l'adversaire.

Troisième Exemple.

Si nous avons un dé ayant p faces, dont r blanches et les autres noires, et si nous promettons de donner à un autre un florin chaque fois qu'une face blanche se présente après une autre face blanche, combien devra-t-on nous donner la première fois qu'une face noire se présente, pour que les chances soient égales de part et d'autre?

Il y a $\frac{r}{p}$ chances de jeter une fois une face blanche, $\frac{r^2}{p^2}$ chances de jeter une face blanche deux fois l'une après l'autre, $\frac{r^3}{p^3}$ chances de jeter 3 fois de suite une face blanche, et ainsi de suite, et comme l'on pourrait jeter l'une après l'autre des faces blanches une infinité de fois, le nombre de florins que le joueur devra payer est égal à la somme de la série

$$\frac{r}{p} + \frac{r^2}{p^2} + \frac{r^3}{p^3} + \frac{r^4}{p^4} + \frac{r^5}{p^5} + \text{etc. jusqu'à l'infini.}$$

somme qui est représentée par $\frac{r}{p-r}$.

Quatrième Exemple.

Si nous avions 1 dé avec 5 faces blanches et 1 face noire, on trouvera que nous devrions recevoir 5 florins lorsque la face noire se présente.

[illegible]

Cinquième Exemple.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Sixième Exemple.

[illegible]

Septième Exemple.

[illegible]

Neuvième Problème.

[illegible]

On pourrait entendre la question proposée de deux manières. En premier lieu on peut se figurer que si A B C etc. viennent à tirer chacun une fiche noire, ces fiches ne seront pas restituées (ce qui est à l'avantage des joueurs suivants), mais on peut également interpréter la question de telle manière que celui qui tire une mauvaise fiche la restitue aussitôt. Nous parlerons d'abord du premier cas, et ensuite du second.

Si l'on suppose qu'il y ait s joueurs en tout et que le rang du joueur dont on désire connaître la part soit r, si l'on pose en outre $p - r = q$, $q - s = h$, $q - 2s = i$, $q - 3s = k$, etc., on peut trouver par la formule suivante les rapports des chances des différents joueurs. On peut prendre pour r successivement les valeurs 1, 2, 3 etc. jusque s.

$$\frac{q \times q-1 \times q-2 \times q-3 \times q-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \text{ etc.} + \frac{h \times h-1 \times h-2 \times h-3 \times h-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$\text{etc.} + \frac{i \times i-1 \times i-2 \times i-3 \times i-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \text{ etc.} +$$

$$+ \frac{k \times k-1 \times k-2 \times k-3 \times k-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \text{ etc.} + \text{etc.}$$

Chaque produit doit avoir (b — 1) facteurs.

Si l'on veut connaître la part de l'enjeu qui revient à chaque joueur, on peut prendre l'expression précédente pour numérateur. Le dénominateur doit être alors la fraction suivante, dont le numérateur et le dénominateur sont des produits formés d'un nombre de termes tel que le dernier terme est égal à (a + 1) ou à [illegible]

$$\frac{p \times p-1 \times p-2 \times p-3 \times p-4 \times p-5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \text{ etc.}$$

Premier Exemple

Supposons qu'il y ait trois joueurs A, B et C, ayant 12 fiches, à savoir 4 fiches blanches et 8 fiches noires. Le problème est alors identique au deuxième des 5 derniers Problèmes que Monsieur C. HUYGENS a proposés aux amateurs. On a dans ce cas $p = 12$, $a = 8$, $b = 4$, et en posant $r = 1, 2, 3$, on trouve ce qui suit

$$A \quad \frac{11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3} + \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} \text{ ou } 231$$

$$B \quad \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} + \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} + \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} \text{ ou } 159$$

$$C \quad \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} + \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} + \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} \text{ ou } 105$$

En divisant le tout par 3, on trouve que les chances de A, de B et de C sont entre elles comme les nombres 77, 53 et 35.

Deuxième Exemple.

Supposons qu'il y ait quatre joueurs A, B, C et D qui jouent avec 23 fiches, à savoir 17 noires et 6 blanches. On trouvera alors pour la chance de A 37162, pour celle de B 27951, pour celles de C et de D 20720 et 15114 respectivement.

Mais si l'on restituait tout de suite les fiches tirées qui ne font pas gagner, les rapports que les chances des joueurs ont les unes par rapport aux autres seraient exprimés par la formule suivante dérivée de la formule que nous avons trouvée en résolvant le troisième Problème un peu avant le premier Exemple. Les grandeurs désignées là par r, s, t, v, etc. sont ici égales à l'unité, celles désignées par a, b, c, d, etc. Sont ici toutes égales entre elles et à $\frac{a}{b}$. On a donc

$$\begin{array}{ll}
A & 1 - \frac{a}{p} \\
B & \cdot + \frac{a}{p} - \frac{a^2}{p^2} \\
C & \cdots\cdots + \frac{a^2}{p^2} - \frac{a^3}{p^3} \\
D & \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{a^3}{p^3} - \frac{a^4}{p^4} \\
E & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{a^4}{p^4} - \frac{a^5}{p^5}.
\end{array}$$

Ces chances forment une progression géométrique, dont le premier terme est $1 - \frac{a}{p}$ et la raison $\frac{a}{p}$. Si r est le numéro d'ordre du joueur dont on désire connaître la part, cette part est exprimée par la fraction suivante, où s indique le nombre total des joueurs:

$$\frac{1 - \frac{a}{p} \times \frac{a^{r-1}}{p^{r-1}}}{1 - \frac{a^s}{p^s}}$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par p^s et qu'on pose $1 - \frac{a}{p} = \frac{b}{p}$, on trouve

$$\frac{b \times a^{r-1} \times p^{s-1}}{p^s - a^s}.$$

C'est là la véritable part d'un joueur quelconque.

Troisième Exemple.

Si l'on avait entendu dans ce dernier sens le problème considéré dans le premier Exemple, on aurait trouvé pour la part de A $\frac{4 \times 12^2 \times 8^0}{12^3 - 8^3}$ ou $\frac{9}{19}$; pour celle de B $\frac{4 \times 8^1 \times 12^1}{12^3 - 8^3}$ ou $\frac{6}{19}$ et pour celle de C $\frac{4 \times 8^2 \times 12^0}{12^3 - 8^3}$ ou $\frac{4}{19}$.

Quatrième Exemple.

S'il y avait 34 joueurs possédant 337 fiches, à savoir 10 blanches et 327 noires, et si l'on demandait la part du joueur qui aurait le numéro d'ordre 19, on aurait b = 10, a = 327, p = 337, s = 34, r = 19; on trouverait donc pour la part de ce joueur

$$\frac{10 \times 327^{19-1} \times 337^{34-19}}{337^{34} - 327^{34}}.$$

On trouve aisément à l'aide de logarithmes que la valeur de cette fraction est à-peu-près égale à $\frac{750373}{27872928}$. C'est là le résultat demandé.

Cinquième Exemple.

Supposons que, le Problème étant compris dans le premier sens, A veuille parier avec B, que personne n'aura encore gagné le jeu après qu'on aura déjà choisi s fiches. Si alors A veut mettre un florin, on demande ce que son adversaire B devra mettre au jeu, pour qu'ils parient l'un et l'autre avec le même avantage. Réponse : $\frac{p \times \overline{p-1} \times \overline{p-2} \times \overline{p-3}}{a \times \overline{a-1} \times \overline{a-2} \times \overline{a-3}}$ etc. — 1. Le nombre des termes du numérateur aussi bien que celui des termes du dénominateur doit être égal à s.

Sixième Exemple.

Si A, dans le Problème de M. HUYGENS, veut parier que personne n'aura encore gagné le jeu, lorsqu'on aura déjà choisi 3 fiches, on trouvera que B doit mettre $2\frac{13}{14}$ florins contre le florin de A.

Septième Exemple.

S'il y avait deux joueurs, A et B, ayant 337 fiches, à savoir 10 blanches et 327 noires, et qu'on demandait le nombre des fiches qu'on devrait rationnellement choisir pour que B pût faier

avec A sans avantage ni désavantage le pari suivant : l'un des deux joueurs parierait que parmi toutes les fiches choisies il y aurait une fiche blanche, l'autre qu'il n'y en aurait pas, la formule, d'après ce que nous avons trouvé, serait la suivante. Elle donne à-peu-près le nombre exact. Soit s le nombre demandé.

$$s = \frac{\text{logarithme de } 2}{\log. p - \frac{a}{3b} - \log. a - \frac{a}{3b}}.$$

Cette formule nous apprend que les deux joueurs peuvent parier 1 contre 1, l'un que le jeu sera gagné après que $22\frac{1}{4}$ fiches environ auront été choisies, l'autre qu'alors le jeu ne sera pas gagné. Remarque : Nous parlons de $\frac{1}{4}$ fiche, dans le même sens dont nous avons parlé de $\frac{1}{5}$ coup dans le 2ième Exemple appartenant au 4ième Problème.

Huitième Exemple.

S'il y avait une loterie de 30000 lots, où il y aurait 10 gros prix, on pourrait parier 1 contre 1, qu'un des gros prix aura déjà été gagné lorsque 2009 lots auront été tirés. Si dans la même loterie il y a 400 prix de 1000 florins, un des prix devra être gagné par un des 52 premiers lots 1), et si dans la même loterie il y a 3800 prix, on pourrait presque parier 1 contre 1, comme auparavant, qu'un prix tombera sur un des 5 premiers lots.

Neuvième Exemple.

M. JEAN LAW a fait dans les journaux l'offre suivante : on pouvait lui indiquer les numéros de dix lots de la loterie organisée par la république, dont la mise a commencé le 12 Août 1712, et il se disait disposé à assurer ces lots. Il recevrait 100 florins et si tous les lots étaient des non-valeurs, c. à d. si aucun prix ne tombait sur eux, il payerait 300 florins. De même il recevrait 100 florins pour 15 lots, et il en payerait 500. On demande quels avantages ces offres avaient pour lui.

1) Ou plutôt : on pourra parier 1 contre 1 qu'un des prix sera gagné par un des 52 premiers lots. (N. d. tr.)

Nous ferons d'abord le calcul pour le cas de 10 lots. Les prix et les non-valeurs de cette loterie sont les mêmes que dans le 8ième Exemple 1). Le nombre total des différentes façons dont on peut tirer 10 lots de la loterie, est

1624792867064524414332530452462367470000.

De 26200 non-valeurs on peut en prendre 10 différentes de

41927972757232619380604843271160988680

façons. Le nombre total des chances est donc au nombre des chances de ne gagner aucun prix à-peu-près comme sont entre eux les nombres 16248 et $4192\frac{3}{4}$. Il s'ensuit que des 3000 assurances qui couvrent la loterie entière 774 à-peu-près seraient perdues, de sorte que M. LAW, s'il avait assuré tous les lots, devrait payer 232200 florins. Or, il en recevrait 300000. Son gain sur la loterie entière serait donc de 67800 florins, c. à. d. de 22 florins et 12 sous sur chaque assurance.

Mais comme cette méthode est longue, nous en avons imaginé une autre par les logarithmes, qui donne une valeur approchée. Soit t le nombre des lots assurés. Il faut calculer

$$\frac{t}{2} \times [\log. p - \log. a + \log. p - t + 1 - \log. a - t - 1.]$$

Le nombre correspondant à ce logarithme exprime celui des assurances sur lesquelles l'assureur en perd une.

Si l'on assure les lots 15 à 15, le nombre donné par notre formule est 8825201. Le nombre qui correspond à ce logarithme est $7\frac{63}{100}$, de sorte que de 763 assurances l'assureur en perdra 100. Sur 2000 assurances qui couvrent toute la loterie, le nombre d'assurances qu'il perd est de $262\frac{1}{8}$ environ. Il devra donc alors payer $131062\frac{1}{2}$ florins, tandis qu'il en recevra en tout 200000. Il gagne donc $68937\frac{1}{2}$ florins, ce qui fait environ 34 florins 9 sous 6 deniers 2) sur chaque assurance. Mais si l'on payait environ 763 florins chaque fois qu'aucun prix ne tombe sur 15 lots, les chances seraient égales.

1 Il y a 3800 prix. N. d. tr.

2 Un sou = 16 deniers. N. d. tr.

Dixième Exemple.

Dans la loterie hollandaise, dont la mise a commencé le 30 Octobre 1713, il y avait — suivant le projet de cette loterie — 1 million de lots, parmi lesquels 150000 billets gagnants. Nous avons calculé que si l'on recevait 100 florins et qu'à ce prix on assurait dix lots contre la chance de ne gagner aucun prix on devrait payer environ 507 florins et 19 sous si aucun prix ne tombait sur ces lots et que les chances de l'assureur et du public doivent être égales; pour 7 lots on devrait payer de même 311 florins et 18 sous environ, mais pour 4 lots 191 florins et 12 sous à-peu-près.

Dixième Problème.

On a un certain nombre de cartes, parmi lesquelles il y a q atouts et p autres cartes. On échange r cartes, c. à. d. on rejette celles qui ne sont pas des atouts et on en prend d'autres à leur place. Quelle chance de gagner aura-t-on, si l'on parie qu'après un nombre donné de changements on aura i atouts?

Pour trouver le numérateur de la part qui nous revient, substituez dans la formule suivante $n = 0$, $n = 1$, etc. jusqu'à $n = i$ inclusivement. Posez $p + q - r = s$, $p - r + n = k$, alors $q - n = s - k$. Cette formule est applicable au cas de deux changements.

le nombre des termes doit être r — n; n termes; r — i termes

$$\frac{p \cdot \overline{p-1} \cdot \overline{p-2} \cdot \overline{p-3}}{s \cdot \overline{s-1} \cdot \overline{s-2} \cdot \overline{s-3}} \text{ etc.} \times \frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2} \cdot \overline{q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.} \times \frac{k \cdot \overline{k-1} \cdot \overline{k-2} \cdot \overline{k-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

i — n termes

$$\text{etc.} \times \frac{\overline{q-n} \cdot \overline{q-n-1} \cdot \overline{q-n-2} \cdot \overline{q-n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.}$$

Le numérateur est

r termes

$$\frac{\overline{p+q} \cdot \overline{p+q-1} \cdot \overline{p+q-2} \cdot \overline{p+q-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.}$$

Premier Exemple.

Supposons que nous ayons 40 cartes et que nous voulions jouer „scharwenselen" 1). Lorsque l'atout est tourné, il y a encore

1) Voir p. 31. N. d. tr.)

10 atouts et 29 autres cartes. On demande quelle chance nous aurons d'avoir après le deuxième changement ni plus ni moins de 3 atouts. Nous développerons ici à l'aide de la formule ci-dessus la solution de cet Exemple pour que l'on comprenne mieux cette formule. Observons que nous comptons pour un „changement" le fait de recevoir r cartes la première fois.

Alors $p = 29$, $q = 10$, $i = 3$, $r = 5$, $s = 34$. Lorsque $n = 0$, $k = 24$; lorsque $n = 1$, $k = 25$; pour $n = 2$, $k = 26$; pour $n = 3$, $k = 27$.

$$\frac{29.28.27.26.25}{34.33.32.31.30} \times 0\text{ [1]} \times \frac{24.23}{1 \times 2} \times \frac{10.9.8}{1.2.3} \quad \text{ou} \quad 14135\frac{355}{5797}$$

$$\frac{29.28.27.26}{34.33.32.31} \times \frac{10}{1} + \frac{25.24}{1.2} \times \frac{9.8}{1.2} \quad \text{ou} \quad 55311\frac{933}{5797}$$

$$\frac{29.28.27}{34.33.32} \times \frac{10.9}{1.2} \times \frac{26.25}{1.2} \times \frac{8}{1} \quad \text{ou} \quad 71443\frac{193}{374}$$

$$\frac{29.28}{34.33} \times \frac{19.9.8}{1.2.3} \times \frac{27.26}{1.2} \times 0\text{ [1]} \quad \text{ou} \quad 30482\frac{106}{187}$$

Le numérateur est 575757. ——————————— $171372\frac{267}{1054}$

Par conséquent nous avons droit à la partie $\frac{220545}{740962}$ de l'enjeu, autrement dit on devrait mettre 220545 contre 520417 pour parier sans avantage ni désavantage qu'après le deuxième changement on aura 3 atouts, ni plus ni moins.

Deuxième Exemple.

Mais si l'on gagne le pari lorsqu'on obtient plus de 3 atouts en deux changements aussi bien que lorsqu'on en gagne 3, il faut donner à i toutes les valeurs de 3 à 5. En ce cas on devrait mettre 4164713 contre 6208755.

Pour trouver quelle chance on a d'obtenir en trois changements i atouts, ni plus ni moins, nous nous servons, outre de la formule précédente, de celle qui suit.

Posez $s - r = m$, $k - r = g$. Si alors $n = 0, 1, 2, 3$, on a $g = 19, 20, 21, 22$.

$$\frac{\overbrace{\dfrac{g \times (g-1) \times (g-2) \times (g-3)\ \text{etc.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4}}^{r\,-\,i\ \text{termes}} \times \overbrace{\dfrac{(q-n) \times (q-n-1) \times (q-n-2) \times (q-n-3)\ \text{etc.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4}}^{i\,-\,m\ \text{termes}}}{\dfrac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)\ \text{etc.}}{1.2.3.4.5}\ (r-n\ \text{termes})}$$

1 En écrivent $\times 0$, l'auteur veut dire évidemment que le nombre des termes de la fraction $\frac{q.(q-1)}{1.2}$ etc. ou $\frac{(p+q).(p+q-1)}{1.2}$ etc. s'annule. (N. d. tr.)

Dans la formule dont nous nous sommes servis à la page précédente, il faut poser d'abord i = o, ensuite i = 1, = 2 etc. et donner à n chaque fois toutes les valeurs possibles, depuis o jusqu'à i inclusivement. Soient a, b, c, d, etc. les résultats de ce calcul. Si alors dans la formule écrite ci-dessus nous posons d'abord n = o, puis n = 1 etc. jusqu'à i inclusivement, et que nous multiplions le premier résultat par a, le deuxième par b, le troisième par c. etc., la somme sera la part demandée. On voit aisément comment on peut continuer les séries des termes pour un plus grand nombre de changements. Il ne faut pas oublier que si l'on ne faisait autre chose que conserver les cinq premières cartes, il faudrait dans la formule écrite à la page 96 remplacer partout n par i, qu'il ne devrait y avoir que deux groupes de termes dans le numérateur, et que le dénominateur du premier groupe devrait être 1.2.3.4 au lieu de s.s — 1.s — 2.

Troisième Exemple.

Si dans le premier Exemple nous avions parié qu'au bout de trois changements nous aurions 3 atouts, ni plus ni moins, on trouvera qu'on peut mettre 54296975 contre 80558109.

Quatrième Exemple.

Nous avons trouvé qu'on ne peut pas encore parier 1 contre 1 d'obtenir 5 atouts par 5 changements: il faudrait mettre environ 28 contre 29. Mais si l'on pouvait faire 6 changements, on aurait avantage à accepter le pari.

Cinquième Exemple.

Supposons qu'on gagne le jeu si l'on a 4 atouts après le deuxième changement, mais qu'on gagne également si après le troisième changement on a 2 atouts, ni plus ni moins. (Remarque: il est défendu de rejeter des atouts, de sorte qu'on a déjà perdu si après le deuxième changement on a 3 ou plus de 3 atouts). On aurait alors 197431313 chances de gagner contre 409416565 chances de perdre.

Sixième Exemple.

Supposons qu'on veuille jouer „scharwenselen" 1) avec 36 cartes et qu'on ait tourné l'atout. A, à qui l'atout tourné n'appartient

1 Voir p. 31. (N. d. tr.)

pas, regarde seul ses cartes et n'y trouve pas d'atouts. B veut donner 100 florins à A qui a la main, si au bout des 2 changements qu'il a encore le droit de faire il ne trouve parmi ses cartes aucun atout, 50 florins s'il a 4 atouts au bout des changements dont nous avons parlé, et 25 florins s'il en a 5. On demande combien de florins A devra donner à B, s'il a 1, 2 ou 3 atouts au bout des changements en question, afin que les chances des deux joueurs soient égales? Réponse: $7\frac{47264}{292923}$ florins.

Septième Exemple.

Si A avait parié qu'au bout des changements en question on aurait 0, 1 ou 2 atouts, et B qu'on aurait 3, 4 ou 5 atouts, la chance de A serait à celle de B environ comme 47 est à 48.

Huitième Exemple.

On a un nombre pair de cartes, dont on en prend une, sur laquelle on met la suivante, celle qui suit alors est placée en-dessous des deux premières, puis la suivante de nouveau au-dessus, et ainsi de suite, alternativement en-dessous et au-dessus (la dernière carte sera donc placée au-dessus) jusqu'à ce qu'on aura distribué ainsi toutes les cartes. On recommence ensuite la même opération. On demande combien de fois il faudra distribuer ainsi les cartes qu'on a dans la main pour qu'elles se suivent de nouveau dans l'ordre initial.

Si l'on a p cartes et que $p - 2$ ou $p - 4$ est divisible par 12, il faut distribuer toutes les cartes p fois pour qu'elles se suivent de nouveau dans l'ordre initial.

Si l'on a 2^r cartes et qu'on exécute $r + 1$ fois l'opération dont nous avons parlé, elles se suivront de nouveau dans l'ordre initial. Cela est exprimé par l'arithmétique de la façon suivante

1 — 2 — 4 — 8 — 16 — 32 — 64 — 128 — 256 etc. cartes doivent être distribuées

1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 — 9 fois.

Onzième Problème.

On demande quel est l'avantage du banquier dans le jeu nommé „Banco flute."

Les principales conditions sont les suivantes. Un nombre illimité de joueurs prennent un jeu de cartes. L'un deux est le ban-

quier. Après que les cartes ont été mêlées, on divise le jeu en un nombre de parties égal à celui des joueurs et chacun des adversaires du banquier place sa mise sur ses cartes. Le banquier doit payer une somme égale à la mise à tous ceux dont la carte de dessous a une valeur plus haute que la carte correspondante du banquier. Mais si la carte de dessous du banquier est égale en valeur ou qu'elle a une valeur supérieure à celle d'un des joueurs, le banquier gagne la mise de ce joueur. Le banquier reste en fonction tant que sa carte de dessous n'a pas une valeur inférieure à la plus basse des cartes correspondantes de ses adversaires.

Supposons qu'il y ait s joueurs, qu'on ait p cartes, parmi lesquelles q différentes couleurs et que la mise de chaque joueur soit a. Si le banquier a une carte, il en reste encore p — 1. Parmi celles-ci il y a en moyenne plus de cartes qui font gagner le banquier que de cartes qui le font perdre : la différence est q — 1. L'avantage du banquier serait donc $as \times \frac{q-1}{p-1}$ s'il n'avait la banque qu'une seule fois. On pourrait trouver la même formule à l'aide des combinaisons.

Pour trouver maintenant le nombre des cas où le banquier perd la banque, il faut remarquer que si le banquier a une des plus basses cartes, il y a p — q cartes qui lui font perdre la banque. Il faut donc examiner de combien de manières on peut de p — q cartes en prendre s ; on trouve que le nombre en est $\frac{\overline{p-q}\,.\,\overline{p-q-1}\,.\,\overline{p-q-2}}{1\,.\,2\,.\,3}$ etc. (s termes). Si le banquier a une carte supérieure d'une unité seulement à une des plus basses cartes, il y a p — 2q cartes qui lui font perdre la banque. Le nombre de manières différentes dont s joueurs peuvent chacun obtenir une de ces p — 2q cartes est $\frac{\overline{p-2q}\,.\,\overline{p-2q-1}\,.\,\overline{p-2q-2}}{1\,.\,2\,.\,3}$ etc. (s termes). Et en continuant à raisonner de la sorte, on trouve le numérateur de la formule écrite ci-dessous, lequel exprime le nombre de cas où le banquier perd la banque. Quant au dénominateur, on le trouve en cherchant de combien de manières on peut de p — 1 cartes en prendre s. Le nombre cherché est $\frac{\overline{p-1}\,.\,\overline{p-2}\,.\,\overline{p-3}}{1\,.\,2\,.\,3}$ etc. (s termes); il faut le multiplier par $\frac{p}{q}$, car dans le numérateur on a une somme de $\frac{p}{q}$ termes, y compris le dernier terme qui bien entendu

est nul (car si le banquier a une des cartes les plus élevées, il n'y a pas de cas qui peuvent lui faire perdre la banque). Or, le banquier n'a qu'une seule carte de dessous, le dénominateur doit donc être multiplié par la fraction $\frac{p}{q}$ dont nous venons de parler.

$$\frac{\overbrace{\overline{p-q} \times \overline{p-q-1} \times \overline{p-q-2}}^{\text{s termes}}}{1 \times 2 \times 3} \text{ etc.} + \frac{\overbrace{\overline{p-2q} \times \overline{p-2q-1} \times \overline{p-2q-2}}^{\text{s termes}}}{1 \times 2 \times 3} \text{ etc.} + \text{etc.}$$

$$\frac{p}{q} \times \frac{\overline{p-1} \times \overline{p-2} \times \overline{p-3}}{1 \times 2 \times 3} \text{ etc. (s termes).}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 1, 2, 3 etc. jusqu'à s inclusivement, on a

$$\overbrace{\overline{p-q} \times \overline{p-q-1} \times \overline{p-q-2} \text{ etc.}}^{\text{s termes}} + \overbrace{\overline{p-2q} \,.\, \overline{p-2q-1} \,.\, \overline{p-2q-2},}^{\text{s termes}}$$

$$\text{etc.} + \overbrace{\overline{p-3q} \times \overline{p-3q-1} \times \overline{p-3q-2}}^{\text{s termes}}, \text{ etc, divisé par}$$

$\frac{p}{q} \times \overline{p-1} \times \overline{p-2} \times \overline{p-3} \times \overline{p-4}$, etc. ($s + 1$ termes, y compris le premier).

Désignons cette expression entière par c et l'avantage du banquier lorsqu'il tient la banque une seule fois, c. à. d. l'expression $as \times \frac{q-1}{p-1}$ par d; comme il peut avoir la banque plusieurs et même une infinité de fois, son avantage moyen, tant qu'il reste en fonction, est exprimé par la série infinie

$$d + d \times \overline{1-c}^2 + d \times \overline{1-c}^3 + d \times \overline{1-c}^4 + \text{etc.}$$

La somme de cette série est $\frac{d}{c}$ et l'avantage cherché par conséquent

$$as \times \frac{p \,.\, \overline{q-1}}{q \,.\, \overline{p-1}} \times \frac{\overline{p-1} \,.\, \overline{p-2} \,.\, \overline{p-3} \,.\, \overline{p-4} \,.\, \text{etc. (s termes}}{\underbrace{\overline{p-q} \,.\, \overline{p-q-1} \,.\, \overline{p-q-2}}_{\text{s termes}}, \text{ etc.} + \underbrace{\overline{p-2q} \,.\, \overline{p-2q-1} \,.\, \overline{p-2q-2}}_{\text{s termes}} \,.\, \text{etc.}}$$

(somme de $\frac{p}{q} - 1$ termes).

Premier Exemple.

Si l'on a 52 cartes ordinaires, $p = 52$, $q = 4$, et si 5 personnes jouent contre le banquier, $s = 5$. L'avantage du banquier au bout du jeu, lorsqu'il perd la banque, est alors $2\frac{329489}{957968}$ a. Si

$s = 4$, cet avantage est $1\frac{209483}{554917}$ a, si $s = 3$, $\frac{147}{185}$ a, si $s = 2$, $\frac{75}{194}$ a, et si $s = 1$, $\frac{1}{8}$ a.

Douzième Problème.

On demande quel sera l'avantage du banquier dans le jeu nommé „Treize" 1), si l'on décide que le jeu finira lorsque le banquier aura gagné ou perdu une seule fois.

Le banquier prend un jeu de cartes complet qui est mêlé et coupé. Il dit: „as" et tourne une carte. Si cette carte est un as, le banquier gagne l'enjeu des joueurs, sinon il dit „deux" et tourne de nouveau une carte. Si cette carte est un deux, le banquier gagne, sinon il dit „trois" et ainsi de suite jusqu'à 13. La troisième carte doit être un roi. Si le banquier ne tourne aucune des cartes qu'il annonce, il doit payer à ses adversaires une somme égale à leur mise, et son voisin de droite obtient la banque; mais s'il annonce une carte qui correspond avec celle qu'il tourne, il gagne toutes les mises et continue à dire: as, 2, 3, etc. comme auparavant. Quand enfin il ne reste plus de cartes, le banquier prend toutes les cartes et les mêle de nouveau. Il recommence alors là où il était resté, jusqu'à ce qu'il gagne ou perd. S'il gagne, il recommence comme nous l'avons dit, et ainsi de suite.

Supposons qu'on ait n cartes et que les couleurs, coeur, carreau etc., soient au nombre de p. On a donc p as, p rois, etc. Le nombre total des différentes façons dont on peut prendre n cartes, est $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times$ etc. jusqu'à n. Le nombre total des arrangements possibles où un as occupe la première place est $p \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $n - 1$. Si l'on appelle 1 l'enjeu qu'on peut gagner par le jeu, le banquier a donc droit à la partie $\frac{p}{n}$. Le nombre total des arrangements possibles où un 2 occupe la deuxième place, si l'as n'occupe pas la première, est $p \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $n - 1$, $p^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $n - 2$. Le banquier a droit par là a la partie $\frac{p}{n} - \frac{p^2}{n \times \overline{n-1}}$ de l'enjeu. Le nombre total des cas, où un 3 occupera la troisième place, lorsque la première n'est

1) Voir aussi l'„Essay Analyse", 2ième partie. (N. d. tr.

pas occupée par un as ni la deuxième par un 2 est $p \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $n-1$, $- 2p^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $n-2$, $+ p^3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $n-3$, de sorte que le banquier a droit par là à $\frac{p}{n} - \frac{2p^2}{n \times \overline{n-1}} + \frac{p^3}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}$, et en continuant à raisonner de la sorte, on trouvera les expressions qui suivent, où l'on doit savoir que les nombres ordinaires, figurant dans les numérateurs et qui ne sont pas des exposants, représentent les génitures.

Pour l'as $\frac{p}{n}$

Pour le deux $\frac{p}{n} - \frac{p^2}{n.\overline{n-1}}$

Pour le trois $\frac{p}{n} - \frac{2p^2}{n.\overline{n-1}} + \frac{p^3}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}$

Pour le quatre $\frac{p}{n} - \frac{3p^2}{n.\overline{n-1}} + \frac{3p^3}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}} - \frac{p^4}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}$

Pour le cinq $\frac{p}{n} - \frac{4p^2}{n.\overline{n-1}} + \frac{6p^3}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}} - \frac{4p^4}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}} + \frac{p^5}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}$

La première colonne a $\frac{n}{p}$ termes ; la somme des nombres ordinaires qui y figurent est donc $\frac{n}{p}$. Dans la deuxième colonne il y a $\frac{n}{p} - 1$ termes ; la somme des nombres ordinaires y est $\frac{\frac{n}{p} \times \overline{\frac{n}{p} - 1}}{1.2}$; on trouve de même pour la troisième colonne $\frac{\frac{n}{p} \times \overline{\frac{n}{p} - 1} \times \overline{\frac{n}{p} - 2}}{1.2.3}$ et pour la quatrième $\frac{\frac{n}{p} \times \overline{\frac{n}{p} - 1} \times \overline{\frac{n}{p} - 2} \times \overline{\frac{n}{p} - 3}}{1.2.3.4}$ et ainsi de suite. La part du banquier est donc exprimée par la formule suivante

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{n}{p} - \frac{\frac{n}{p} \times \overline{\frac{n}{p} - 1}}{1.2} \times \frac{p^2}{n.\overline{n-1}} + \frac{\frac{n}{p} \times \overline{\frac{n}{p} - 1} \times \overline{\frac{n}{p} - 2}}{1.2.3} \times \frac{p^3}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}} -$$

$$\frac{\frac{n}{p} \times \overline{\frac{n}{p} - 1} \times \overline{\frac{n}{p} - 2} \times \overline{\frac{n}{p} - 3}}{1.2.3.4} \times \frac{p^4}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}} + \text{etc.}$$

ou, en réduisant les fractions.

$$1 - \frac{n-p}{1.2.\overline{n-1}} + \frac{\overline{n-p}.\overline{n-2p}}{1.2.3.\overline{n-1}.\overline{n-2}} - \frac{\overline{n-p}.\overline{n-2p}.\overline{n-3p}}{1.2.3.4.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}} + \text{etc.}$$

Le nombre des termes doit être égal à celui des unités contenues dans $\frac{n}{p}$. Nous avons donc trouvé ici la formule même dont M. NICOLAS BERNOULLI s'est servi. Mais tandis que l',,Analyse'' ne contient que la formule seulement, nous y avons ajouté ici le calcul qui y conduit.

Premier Exemple.

Si $p = 52$ et $q = 4$, et que la mise totale des adversaires du banquier est a, l'avantage du banquier est $\frac{7672980411374433}{26816424180170625}$ a.

Deuxième Exemple.

Si $q = 1$, c.à.d. si toutes les cartes sont différentes, nous avons affaire au cas particulier que M. BERNOULLI résout dans ses ,,Remarques latines'' 1). L'avantage du banquier est alors exprimé par la série suivante qui doit avoir un nombre de termes égal au nombre des cartes:

$$1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Treizième Problème.

On demande quel est l'avantage du banquier dans le jeu appelé ,,Pharaon''.

Les principales conditions sont les suivantes. Le banquier a un jeu complet de 52 cartes. Lorqu'on les a mêlées, il les prend une à une, en place d'abord une à sa droite, puis une à sa gauche, puis de nouveau une à sa droite, une à sa gauche, etc. Chaque fois que deux cartes ont été ainsi placées les joueurs sont libres de mettre une certaine somme sur une ou plusieurs cartes. Lorsque la carte de l'adversaire du banquier se présente à droite (qu'elle occupe donc un rang impair) le banquier gagne la mise du joueur, mais le banquier perd la même somme lorsque la carte se présente à gauche (qu'elle occupe un rang pair). Le banquier prend la moitié de la mise, lorsque les cartes du joueur

1) Le Recueil de Lettres, dont nous avons fait mention à la page 21, contient aussi des remarques de N. BERNOULLI (en latin). (N. d. tr.)

se suivent, à savoir d'abord une de rang impair puis une de rang pair, excepté seulement dans le cas suivant : si les adversaires du banquier ont mis sur deux cartes et que ces deux sont les dernières qu'il distribue, le banquier gagne toutes les mises. La dernière carte enfin n'est en faveur de personne : elle ne compte pas.

Posons p = le nombre des cartes dont dispose le banquier, et q le nombre de fois que la carte indiquée par le joueur se trouve parmi les cartes du banquier.

Nous agirons d'abord comme si la deuxième condition n'existait pas ; nous supposons donc que le banquier gagne immédiatement toute la mise lorsque une des cartes de ses adversaires se présente à droite. Le cas est identique alors à celui où les joueurs ont des fiches blanches et des fiches noires, où chacun en tire une fiche aveuglément, le banquier d'abord, ensuite son adversaire et où celui-là gagne l'enjeu qui obtient le premier une fiche blanche. D'après le huitième Problème le numérateur de la part du banquier sera donc

$$\overbrace{\frac{\overline{p-1}\times\overline{p-2}\times\overline{p-3}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-1\ \text{termes}} + \overbrace{\frac{\overline{p-3}\times\overline{p-4}\times\overline{p-5}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-1\ \text{termes}} +$$

$$\overbrace{\frac{\overline{p-5}\times\overline{p-6}\times\overline{p-7}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-1\ \text{termes}} + \text{etc.}$$

jusqu'au dernier terme qui est nul. Et le numérateur de la part de son adversaire est alors

$$\overbrace{\frac{\overline{p-2}\times\overline{p-3}\times\overline{p-4}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-1\ \text{termes}} + \overbrace{\frac{\overline{p-4}\times\overline{p-5}\times\overline{p-6}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-1\ \text{termes}} + \overbrace{\frac{\overline{p-6}\times\overline{p-7}\times\overline{p-8}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-1\ \text{termes}}$$

En soustrayant cette expression de la précédente, on trouve le reste

$$\overbrace{\frac{\overline{p-2}\times\overline{p-3}\times\overline{p-4}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-2\ \text{termes}} + \overbrace{\frac{\overline{p-4}\times\overline{p-5}\times\overline{p-6}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-2\ \text{termes}} +$$

$$\overbrace{\frac{\overline{p-6}\times\overline{p-7}\times\overline{p-8}}{1\times2\times3}\ \text{etc.}}^{q-2\ \text{termes}} + \text{etc.}$$

C'est là le numérateur de l'expression qui représente l'avantage du banquier. Il faut continuer ces séries jusqu'à ce que le premier nombre du numérateur devient q — 2 ; lorsqu'il est plus petit la fraction est nulle. Le dénominateur doit être $\frac{p\times\overline{p-1}\times\overline{p-2}\times\overline{p-3}}{1\times2\times3\times4}$

etc. (q termes). Mais par la deuxième condition cet avantage est diminué exactement de moitié, car l'avantage du banquier consiste uniquement dans sa primauté et le banquier n'obtient que la moitié de la mise de son adversaire. Quant aux autres chances, celles de gagner ou de perdre la mise entière, elles sont précisément égales lorsque p est pair et qu'il n'y a pas de primauté, vu que chacun choisit à son tour.

Si dans la formule précédente $q = 1$, toute l'expression est nulle; mais à cause de la condition concernant la dernière carte l'avantage du banquier est $\frac{1}{p}$, si $q = 1$; alors chaque terme $= 1$; seulement à cause de l'avant-dernière condition le dernier terme doit être 2.

La formule précédente diffère de celle de l'auteur de l',,Analyse''. Elle diffère également de celle trouvée par M. NICOLAS BERNOULLI pour le cas où q est plus grand que 2.

$$\frac{1}{4} \times \frac{q}{p \quad q+1} - \frac{q \cdot q-1}{p \quad q+1 \cdot p-q+2} \qquad \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \times$$

$$- - \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2}{p-q+1 \cdot p-q+2 \cdot p-q+3} - - \text{etc. } (q - 1 \text{ termes}).$$

Notre formule a un plus grand nombre de termes, mais nous y opérons avec des nombres entiers, et dans cette formule-ci on opère avec des fractions. On peut tirer cette formule de la précédente en ajoutant les différentes expressions; seulement il faut chaque fois en sauter une.

Premier Exemple.

Soit $p = 34$ et $q = 3$, tandis que 1 représente la somme mise sur chaque carte. L'avantage du banquier est alors $\frac{1}{44}$ et, si $q = 4$, $\frac{21}{682}$.

Mais si l'on remarque que dans ce jeu l'avantage du banquier consiste uniquement dans le fait qu'il gagne la moitié de l'enjeu lorsque deux cartes du joueur se suivent dans l'ordre que nous avons mentionné, on peut raisonner comme suit:

Deuxième Exemple.

Supposons que quelqu'un ait quelques lettres A, B, C, D etc. jusqu'à p, qu'on en prenne quelques-unes, p. e. A, B, C etc. jusqu'à

q, et qu'on demande alors de combien de façons 2 des lettres choisies peuvent occuper la première et la deuxième place (soit O ce nombre), de combien de façons l'une des q lettres peut occuper la troisième et une autre la quatrième place, si elles n'occupent pas la première et la deuxième place (soit P ce nombre), etc. Q représente le nombre qui correspond à la cinquième et à la sixième place, et ainsi de suite. On trouvera, en posant $p - q = r$,

$q \times \overline{q-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $p - 2 = O$

$q \times \overline{q-1} \times r \times \overline{r-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $p - 4 = P$

$q \times \overline{q-1} \times r \times \overline{r-1} \times \overline{r-2} \times \overline{r-3} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $p - 6 = Q$

$q \times \overline{q-1} \times r \times \overline{r-1} \times \overline{r-2} \times \overline{r-3} \times \overline{r-4} \times \overline{r-5} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc. jusqu'à $p - 8 = R$, etc.

Le nombre total des cas possibles est $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ etc. jusqu'à p.

On trouve ainsi pour l'avantage du banquier

$$1 + \frac{r \cdot \overline{r-1}}{\overline{p-2} \cdot \overline{p-3}} + \frac{r \cdot \overline{r-1} \cdot \overline{r-2} \cdot \overline{r-3}}{\overline{p-2} \cdot \overline{p-3} \cdot \overline{p-4} \cdot \overline{p-5}} + \frac{r \cdot \overline{r-1} \cdot \overline{r-2} \cdot \overline{r-3} \cdot \overline{r-4} \cdot \overline{r-5}}{\overline{p-2} \cdot \overline{p-3} \cdot \overline{p-4} \cdot \overline{p-5} \cdot \overline{p-6} \cdot \overline{p-7}} + \text{etc.},$$

le tout multiplié par $\frac{q \cdot \overline{q-1}}{p \cdot \overline{p-1}}$.

Si l'adversaire du banquier met 1, tout doit encore être multiplié par $\frac{1}{2}$. Cette formule a été trouvée dans l',,Analyse" par la réduction de certaines équations. Nous sommes arrivés ici au même résultat à l'aide de combinaisons, ce qui est beaucoup plus aisé.

Troisième Exemple.

De la même manière on trouve pour la part du banquier dans le jeu nommé ,,La Bassette" 1), lorsque q est plus grand que 1,

$$-\frac{1\, q \cdot \overline{p-q}}{3\, p \cdot \overline{p-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{q}{p} - \frac{1}{4} \cdot \frac{q \cdot \overline{q-1}}{p \cdot \overline{p-q+1}} + \frac{1}{2} \times \frac{q \cdot \overline{q-1} \cdot \overline{q-2}}{p \cdot \overline{p-q+1} \cdot \overline{p-q+2}} + \text{etc. (q termes)}$$

Si $q = 1$, il faut encore y ajouter $\frac{1}{p}$.

1) On peut trouver les règles de ce jeu dans l',,Essay d'Analyse", 2$^{e\ me}$ partie (N. d. tr.)

Quatorzième Problème.

A et B ont chacun un certain nombre de pièces de monnaie. On jettera des dés dont quelques faces sont en faveur de A: lorsque celles-ci se présentent, B doit donner une pièce de monnaie à A. D'autres faces sont en faveur de B: lorsque celles-ci se présentent, B reçoit de A une pièce de monnaie. Celui qui sera le premier en possession de toutes les pièces de monnaie, gagnera le jeu. On demande quelle est la part de chaque joueur.

Supposons que A et B aient respectivement r et s pièces de monnaie. Posons $r + s = d$ et supposons en outre que A ait b chances de gagner une pièce de monnaie, et B c chances.

Posons $x =$ la part de A lorsqu'il a 1 pièce de monnaie, $z =$ sa part lorsqu'il en a 2, et $y =$ sa part lorsqu'il en a 3, le nombre de pièces que possède B étant quelconque.

Chances.

A a $\quad b - z \left\{ \begin{array}{l} bz \\ 0 \end{array} \right.$

$\quad\quad c - 0$

$b + c \quad bz$

$b + z$

$$\frac{bz}{b+z} = x$$

$$bz = bx + cx$$

$$z = x + \frac{c}{b}x$$

Chances.

$b - y \left\{ \begin{array}{l} by \\ cx \end{array} \right.$

$c - x$

$b + c \quad by + cx$

$$\frac{by + cx}{b + c} = z = x + \frac{c}{b}x$$

$$by + cx = bx + cx + \frac{bc + cc}{b}x$$

ou

$$y = x + \frac{c}{b}x + \frac{cc}{bb}x.$$

Et en continuant ainsi on trouvera :

$$\text{Si A a}\left\{\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\right\}\ \text{pièces de monnaie, sa part est}\ \left\{\begin{array}{l}x\\ x + \frac{c}{b}x\\ x + \frac{c}{b}x + \frac{cc}{bb}x\\ x + \frac{c}{b}x + \frac{cc}{bb}x + \frac{c^3}{b^3}x\\ x + \frac{c}{b}x + \frac{cc}{bb}x + \frac{c^3}{b^3}x + \frac{c^4}{b^4}x.\end{array}\right.$$

Lorsque A a toutes les pièces de monnaie, il gagne l'enjeu total. L'enjeu total est donc égal à une somme de termes dont le nombre est égal à celui des pièces de monnaie, de sorte que sa part est exprimée par la fraction suivante

$$\frac{x + \frac{1}{q}x + \frac{cc}{bb}x + \frac{c^3}{b^3}x + \frac{c^4}{b^4}x + \text{etc. } (r \text{ termes})}{x + \frac{c}{b}x + \frac{cc}{bb}x + \frac{c^3}{b^3}x + \frac{c^4}{b^4}x + \text{etc. } (d \text{ termes})}$$

En faisant disparaître les fractions et en divisant le tout par x, on obtient

$$\frac{b^{d-1} + b^{d-2}c + b^{d-3}cc + b^{d-4}c^3 + b^{d-5}c^4 + \text{etc. } (r \text{ termes})}{b^{d-1} + b^{d-2}c + b^{d-3}cc + b^{d-4}c^3 + b^{d-5}c^4 + \text{etc. } (d \text{ termes}).}$$

Le numérateur et le dénominateur forment l'un et l'autre une progression géométrique. La somme de la première est $\frac{b^d - c^r b^s}{b - c}$, et celle de la seconde $\frac{b^d - c^d}{b - c}$. Le part de A est donc $\frac{b^d - c^r b^s}{b^d - c^d}$, et celle de B $\frac{c^r b^s - c^d}{b^d - c^d}$.

Premier Exemple.

Deux personnes A et B jouent avec 2 dés. A a 19 pièces de monnaie, B en a 5. A doit donner une pièce de monnaie à B lorsqu'on jette 10 points, et B une pièce de monnaie à A lorsqu'on en jette 11. Quelle est la chance de chacun d'eux?

On trouvera que A a 245237169537 chances de perdre et 37175549728 chances de gagner, de sorte que pour jouer contre B sans avantage ni désavantage il devrait mettre 1 au jeu et B un peu moins de 7.

Lorsqu'ils ont l'un et l'autre le même nombre de pièces de monnaie, c.à.d. lorsque $r = s$ et $d = 2s$, la part de A est $\frac{b^{2s} - c^s b^s}{b^{2s} - c^{2s}}$. Si l'on

divise le tout par $b^s - c^s$, il vient $\frac{b^s}{b^s + c^s}$. Et pour la part de B on trouve ensuite $\frac{c^s}{b^s + c^s}$.

Deuxième Exemple.

Ayant pris chacun 12 pièces de monnaie, A et B jouent avec 3 dés à cette condition que lorsqu'on jette 11 points, A doit donner une pièce de monnaie à B, mais lorsqu'on en jette 14, B doit en donner une à A et que celui-là gagnera la partie qui le premier sera en possession de toutes les pièces de monnaie. Quelle chance de gagner auront-ils l'un et l'autre? C'est là le dernier des Problèmes posés par M. C. HUYGENS.

Avec 3 dés on peut faire 27 coups de 11 points et 15 coups de 14 points. Les chances qu'ils ont de gagner une pièce de monnaie sont donc entre elles comme 5 est à 9. La part de A est donc 5^{12}, celle de B 9^{12}, en d'autres termes la chance de A est à celle de B comme 244140625 est à 282429536481.

Troisième Exemple.

Si l'on etait 2 dés ordinaires avec cette condition que A gagne une pièce de monnaie lorsqu'on jette 7 points, et B lorsqu'on en jette 6, la chance de A serait à celle de B comme 2176782336 est à 244140625, c.à.d. à-peu-près 9 contre 1.

Lorsque les deux joueurs ont la même chance, c.à.d. lorsque $b = c$, chaque terme de la progression géométrique précédente vaut 1; la part de A est donc $\frac{r}{d}$ et celle de B $\frac{s}{d}$, de sorte que leurs chances sont entre elles comme les nombres de leurs pièces de monnaie.

Quatrième Exemple.

A et B jouent avec 2 dés ordinaires. A a 8 pièces de monnaie, B en a 5. A donnera une pièce de monnaie à B lorsqu'on jette 6 points, B en donnera une à A lorsqu'on en jette 8. Celui-là gagnera la partie qui le premier sera en possession de toutes les pièces de monnaie. La part de A est alors $\frac{2}{13}$ et celle de B $\frac{5}{13}$.

Cinquième Exemple.

Supposons que dans le premier Exemple on donne la somme des pièces de monnaie et qu'on demande combien de pièces de

monnaie chacun doit en prendre pour que les chances des joueurs soient égales? Alors $b^d - c^{d-s} b^s = c^{d-s} b^s - c^d$. Prenez $(d - s)$ au lieu de r, vous trouverez $b^d + c^d = 2c^{d-s} \times b^s$. En posant log. $2 = q$, log. $b = k$, log. $c = i$, log. $(b^d + c^d) = h$, on obtient $s = \frac{h - q - id}{k - i}$, de sorte que l'on peut trouver que si A avait 22 pièces de monnaie et B 2 pièces seulement, B jouerait encore avec un léger avantage.

Supposons qu'il y ait deux spectateurs C et D, que C veuille parier que le jeu sera terminé en h coups, et D le contraire, quelles chances auront-ils? Pour calculer ces chances on peut se servir de la formule suivante, trouvée par M. N. BERNOULLI. Cherchons d'abord la part à laquelle C a droit à cause de la chance qu'a le joueur A de gagner le jeu en h coups. Supposons que A doive encore gagner m pièces pour gagner la partie et B n pièces. Soit $m + n = s$. Soit p la chance du joueur A de gagner une pièce de monnaie, q celle de B d'en gagner une. Posons $p + q = r$, $h - m = 2k$.

Soit t le nombre de fois que s est compris dans k. Substituez alors dans la série suivante pour t toutes les valeurs possibles, depuis zéro jusqu'à la grandeur trouvée pour cette lettre, et ajoutez l'une à l'autre toutes ces sommes. Faites la même chose pour la deuxième série. Retranchez la somme de cette dernière de la somme précédente. Le reste est alors la part cherchée, c.à.d. la part de celui qui parie qu' A gagnera le jeu en h coups. Lorsqu'on a divisé k par s et que le reste de la division est plus petit que n, il ne faut pas substituer à t dans la seconde série toutes les valeurs depuis o jusqu'à t, mais seulement jusqu'à $t - 1$. — Pour trouver ensuite la part à laquelle C a droit à cause de la chance qu'a le joueur B de gagner la partie en h coups, remplacez partout q par p, p par q, n par m et m par n.

$$\text{Soit } 2k - 2ts = a$$

Première série:

$$1 \times \overline{p^a + q^a} + h \times \overline{p^{a-1} q + q^{a-1} p} + \frac{h \times \overline{h-1}}{1 \times 2} \times \overline{p^{a-2} q^2 + q^{a-2} p^2}$$

$$+ \frac{h \times \overline{h-1} \times \overline{h-2}}{1 \times 2 \times 3} \times \overline{p^{a-3} q^3 + q^{a-3} p^3} + \text{etc. jusqu'à}$$

$$\frac{h \,.\, \overline{h-1} \,.\, \overline{h-2} \ldots \overline{h - \frac{1}{2}a + 1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \frac{1}{2}a} \times p\, q^{\frac{1}{2}a}, \text{ le tout multiplié par}$$

$$\frac{p^{ts} + m q^{ts}}{r^h}.$$

Deuxième série:

$$1 \cdot p^{a-2n} + q^{a-2n} + h \times p^{a-2n-1} q + q^{a-2n-1} p + \frac{h \cdot h-1}{1 \cdot 2}$$

$$\times p^{a-2n-2} q^2 + q^{a-2n-2} p^2 + \text{etc. jusqu'à}$$

$$\frac{h \cdot h-1 \cdot h-2 \ldots h-\frac{1}{2}a+n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{1}{2}a-n} \times p q^{\frac{1}{2}a-n}, \text{ le tout multiplié}$$

$$\text{par } \frac{p^{ts+s} q^{ts+n}}{r^h}.$$

En posant h, k et a = l'infini on trouvera pour les parts de A et de B les mêmes expressions que plus haut dans le premier Exemple.

On pourrait aussi se servir de la règle de M. DE MOIVRE, laquelle en vérité exige une démonstration plus longue. Cette règle est la suivante. Multipliez p + q par p + q, rejetez toutes les quantités dans lesquelles les dimensions de p surpassent celles de q m fois, de même pour tous les termes où les dimensions des grandeurs q surpassent celles des grandeurs p n fois. Multipliez le reste de nouveau par p + q et rejetez les termes dont nous venons de parler, et ainsi de suite jusqu'à ce que vous aurez fait n — 1 multiplications. Divisez le reste par p + q, vous aurez la part de D. Pour mieux faire comprendre ceci, nous développerons un Exemple d'après cette méthode.

Sixième Exemple.

Supposons que A ait 3 pièces de monnaie et que B en ait 2. A a p chances de gagner une pièce de monnaie et B en a q. C fait un pari avec D que le jeu sera terminé en 6 coups.

$$p + q$$
$$p + q$$
$$pp \mid + 2pq + qq$$
$$p + q$$
$$2ppq + 3pqq + \mid q^3$$
$$p + q$$
$$2p^3q \mid + 5ppqq + 3pq^3$$
$$p + q$$
$$5p^3qq + 8ppq^3 + \mid 3pq^4$$
$$p + q$$
$$5p^4qq \mid + 13p^3q^3 + 8ppq^4.$$

La part de D est donc $\frac{13\,p^3 q^3 + 8\,p\,p\,q^4}{p + q}$. Lorsque $p = q = 1$, la part de D est $\frac{21}{64}$ et celle de C $\frac{43}{64}$.

Dans les séries précédentes il faut bien remarquer que les deux derniers termes sont irréguliers, car tous les autres multiplicateurs des genitures consistent en une somme de 2 termes, tandis que les derniers termes n'en ont chacun qu'un seul. Il faut remarquer de plus que si dans le développement les expressions h-m ou h-n sont trouvées impaires, il faut diminuer h d'une unité. Si l'on prend $p = q = 1$, on a $r = 2$, c. à d. si l'on suppose les chances égales, les séries précédentes prennent la forme suivante:

$$1 + h + \frac{h \,.\, \overline{h - 1}}{1 \,.\, 2} + \frac{h \,.\, \overline{h - 1} \,.\, \overline{h - 2}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \text{etc.} \left(\tfrac{1}{2}\, a + 1 \text{ termes}\right)$$

le tout multiplié par 2 à l'exception du dernier terme qui est multiplié par 1 seulement. La deuxième série est identique à celle que nous venons d'écrire; toutefois le nombre des termes doit être $\frac{1}{2}\, a - n + 1$ seulement. En divisant les deux séries par 2^h, en donnant alors à t toutes les valeurs possibles à partir de zéro, et en retranchant les séries l'une de l'autre, on trouve pour la part de celui qui parie que A gagnera le jeu en h coups, l'expression suivante:

$$\boxed{k + 1} - \boxed{k - n + 1} + \boxed{k - s + 1} - \boxed{k - s - n + 1} + \boxed{k - 2s + 1} - \boxed{k - 2s - 2n + 1} + \text{etc.}$$

La part de celui qui parie que B gagnera le jeu en h coups sera

$$\boxed{k + 1} - \boxed{k - m + 1} + \boxed{k - s + 1} - \boxed{k - s - m + 1} + \boxed{k - 2s + 1} - \boxed{k - 2s - 2m + 1} + \text{etc.}$$

Or $2\,k = h - n$.

Par les nombres renfermés dans des rectangles nous entendons des sommes de genitures, dont la puissance est $h + 1$: le nombre enfermé exprime chaque fois celui des genitures qui composent la somme en question.

Septième Exemple.

Lorsque $m = 3$, $n = 5$ et $h = 13$, on a $s = 8$. La première série devient alors $\boxed{6} - \boxed{1}$ divisé par 2^{13} et la seconde $\boxed{5} - \boxed{2}$

divisé par 2^{13}. On a d'abord $n = 5$ et en second lieu $k = 4$, dans l'une et l'autre série on a de plus $h = 13$. On a le développement suivant :

$$h + 1 = \frac{14 - 13 - 12 - 11 - 10}{1 - 2 - 3 - 4 - 5}$$

1
14
91 ⎫
374 ⎬ 1456
1001 ⎭
2002

C obtient à cause de { A 3472, B 1456

$\frac{4924}{2^{13}}$ ou $\frac{77}{128}$ pour C. Il vient ensuite : $\frac{51}{128}$ pour D.

Huitième Exemple.

Lorsque $m = 3$, $n = 2$ et $h = 15$, il s'ensuit $k = 6$. La première série est alors $\boxed{7} - \boxed{5} + \boxed{2}$. Dans la deuxième il faut prendre 1 de moins pour h, mais on a de nouveau $k = 6$. La deuxième devient $\boxed{7} \quad \boxed{4} + \boxed{2}$ divisé par 2^{14}. Quant à la première, elle doit être divisée par 2^{15}.

$$h + 1 = \frac{16 - 15 - 14 - 13 - 12 - 11}{1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6}$$

$$h + 1 = \frac{15 - 14 - 13 - 12 - 11 - 10}{1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6}$$

1, 16 } 17		1, 15 } 16	
560		105	
1820		455	
4368, 8008 } 12376		1365	
		3003	} 9373
	12393	5005	

C obtient à cause de A $\frac{12393}{2^{15}}$ $\frac{9389}{2^{14}}$

C obtient à cause de B $\frac{9389}{2^{14}}$

add.———

Part de C $\frac{31171}{32768}$.

La part de D est donc $\frac{1597}{32768}$.

L'auteur de l',,Analyse'' trouve que la chance de C est à celle de D comme 13303 est à 3081, ce qui est impossible. Il a bien

trouvé la part qui est due à C à cause de A, mais pour la part qui revient à C à cause de B, il donne la fraction $\frac{14213}{32768}$. Son erreur provient de ce qu'il n'a pas remarqué qu'ici h doit être diminué d'une unité, car si l'on opère avec le nombre h lui-même, on trouve le résultat indiqué par cet auteur. Il est aisé toutefois de voir pourquoi il faut ici diminuer d'une unité le nombre des coups: il est impossible pour A de gagner dans les coups de rang pair et pour B de gagner dans les coups de rang impair. Par conséquent c'est comme si l'on avait posé le problème de la façon suivante: C perdra le jeu, à moins que B ne gagne du 14ième coup, ou du 12ième ou du 10ième, etc. ou à moins que A ne gagne du 15ième, du 13ième ou du 11ième coup, etc.

Si l'on prend $n = m$, les séries qui précèdent immédiatement le 7ième Exemple appartenant au 13ième Problème, ont la même valeur; la règle que nous avons appliquée dans le 6ième Exemple est alors changée dans la suivante:

Portez $p + q$ à la puissance n, retranchez-en les deux termes extrêmes, multipliez le reste par $pp + 2pq + qq$, retranchez-en de nouveau le premier et le dernier terme, multipliez de nouveau le reste par $pp + 2pq + qq$, retranchez-en comme précédemment le premier et le dernier terme, continuez à agir de la même manière, jusqu'à ce que vous aurez fait autant de multiplications qu'il y a d'unités dans k. En divisant le reste par $\overline{p+q}^h$, vous trouverez la part de D.

Neuvième Exemple.

S'il y a 2 joueurs A et B ayant chacun 4 pièces de monnaie et que C peut parier avec D 1 tegen 1, sans avantage ni désavantage, que le jeu sera terminé en 4 coups, quel est le rapport des chances de A et de B de gagner une pièce de monnaie?

On trouve $\frac{4p^3q + 6ppqq + 4pq^3}{\overline{p+q}^4} = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire:

$pp - 2pq + qq = pq\sqrt{12}$. Si l'on pose $p = 1$, il en résulte $q = 5\frac{137}{500}$, ce qui veut dire que la chance de A est à celle de B comme 1 est à $5\frac{137}{500}$.

D i x i è m e   E x e m p l e.

Si dans l'Exemple précédent on avait dit 6 coups au lieu de 4 coups et qu'on demandait la même chose, on aurait $\frac{14 p^4 qq + 20 p^3 q^3 + 14 ppq^4}{\overline{p+q}^6} = \frac{1}{2}$. On trouve par là que la chance de A est à celle de B à-peu-près comme $2\frac{72}{125}$ est à 1, ou comme 322 est à 125.

Quinzième Problème.

Un certain nombre de joueurs A, B, C, D etc. jouent une partie de trictrac ou de piquet. A et B commencent. Celui qui perd met 1 florin. C joue ensuite avec le vainqueur; celui qui perd alors met de nouveau 1 florin an jeu. Après cela D joue avec le vainqueur; celui qui perd met 1 florin comme auparavant, et l'on continue de la même manière: chaque joueur qui perd met 1 florin au jeu. Et celui-là gagne l'enjeu total qui triomphe de tous les autres joueurs l'un après l'autre, qui gagne donc successivement un nombre de parties égal à celui des joueurs moins un. Lorsque tous ont joué, le tour est à ceux qui ont les premiers perdu une partie dans l'ordre où ils ont joué. On demande en premier lieu quel est l'avantage ou le désavantage de chaque joueur, en second lieu quelle somme l'on pourrait parier que A ou B gagnera le jeu plutôt que C. On demande aussi quelle est la chance de gagner l'enjeu de deux joueurs qui se suivent immédiatement. Et en troisième lieu quelle est la durée moyenne de la partie entière?

On a proposé ce Problème à M. N. BERNOULLI. Celui-ci était d'avis que la solution qu'il en avait trouvée valait plus que tout ce qu'il avait inventé en cette matière, bien qu'il ne trouve que deux théorèmes à l'aide desquels il résout le problème, et non pas une formule générale. S'il y a 25 joueurs, il faut encore d'après les théorèmes dont nous avons parlé réduire 48 équations algébriques pour trouver la part d'un joueur, 22 équations s'il y a 12 joueurs, et ainsi de suite. Il nous a semblé bon de chercher une formule générale et nous avons trouvé la formule suivante: si l'on suppose qu'il y ait $n + 1$ joueurs, et qu'on pose $2^n = a$ et $1 + 2^n = b$, l'avantage ou le désavantage d'un joueur quelconque

est exprimé par la formule suivante, où r est le numéro d'ordre du joueur au commencement du jeu :

$$a^r \times \frac{n-b}{b} \times (b^{n-1} - 1) \times \frac{(a - 2r) \times b^n - a^n b + b^{n-1} a r - (n - r - 1) \times a^n}{(2b^n - a) \times (b^{n-1} - a^n)}.$$

Lorsque r = o, ou trouve le désavantage de A et de B, lorsque r = 1 celui de c, lorsque r = 2 celui de D, etc. C'est à dessein que nous avons conservé dans la formule la première fraction $\frac{n-b}{b}$: de cette manière on ne tombe dans aucun embarras en cherchant l'avantage du dernier joueur. En effet, l'avantage ou le désavantage du dernier joueur se trouve avoir toujours la valeur

$$a^r \times \frac{n-b}{b} \times \frac{(a - 2r) \times b^n - a^n b + b^{n-1} a r}{(2b^n - a) \times (b^{n-1} - a^n)}.$$

Premier Exemple.

S'il y a trois joueurs A, B et C, l'avantage de A aussi bien que celui de B est exprimé par $-\frac{3}{49}$. A cause du signe —, il s'agit d'un désavantage. L'avantage de C est $+\frac{6}{49}$. Mais si chaque joueur avait commencé par mettre 1 florin au jeu et que la condition était que tous ceux qui perdraient une partie, feraient après cela une mise de z florins, l'avantage de C serait $\frac{6}{49} z - \frac{1}{7}$. Dans le cas de trois joueurs, lorsque z = 1, la perte de C est $\frac{1}{49}$.

Deuxième Exemple.

S'il y a quatre joueurs A, B, C et D, le désavantage de A aussi bien que celui de B est $\frac{2700}{22201}$, l'avantage de C est $\frac{1170}{22201}$ et celui de D $\frac{4224}{22201}$.

Troisième Exemple.

S'il y a 5 joueurs A, B, C, D et E, le désavantage de A aussi bien que celui de B est $\frac{24059828}{131079601}$, celui de C $\frac{2402712}{131079601}$, l'avantage de D $\frac{16789760}{131079601}$ et celui de C $\frac{33732608}{131079601}$.

Et quand même il y aurait 100 joueurs, on pourrait trouver les

nombres correspondants à l'aide de la formule précédente en se servant de logarithmes, ce qui est impossible quand on ne connaît que les théorèmes de M. BERNOULLI.

La réponse à la seconde question est la suivante. Les chances de deux joueurs qui se suivent, B et C, ou C et D etc. sont entre elles comme les nombres $2^n + 1$ et 2^n ou b et a, avec cette exception que les chances de A et de B sont égales.

Et enfin, si l'on pariait que le jeu sera terminé au bout de $n + p - 1$ parties, la part qui nous revient serait exprimée par la formule suivante, trouvée également par l'auteur nommé:

$$\frac{p+1}{1.2^n} - \frac{\overline{p-n} \times \overline{p-n+3}}{1.2.2^{2n}} + \frac{\overline{p-2n} \times \overline{p-2n+1} \times \overline{p-2n+5}}{1.2.3.2^{3n}} -$$

$$\frac{\overline{p-3n} \times \overline{p-3n+1} \times \overline{p-3n+2} \times \overline{p-3n+7}}{1.2.3.4.2^{4n}} +$$

$$\frac{\overline{p-4n} \times \overline{p-4n+1} \times \overline{p-4n+2} \times \overline{p-4n+3} \times \overline{p-4n+9}}{3.4.5.2^{5n}} + \text{etc.}$$

On doit prendre de cette série un nombre de termes égal à celui des unités contenues dans p. Il est aisé de voir comment les termes de cette série se suivent: chaque fraction a dans le numérateur un facteur de plus que la fraction précédente et les facteurs forment une progression arithmétique avec la raison 1, excepté le dernier terme du numérateur qui renferme un nombre ordinaire différant chaque fois de deux unités du nombre correspondant que renferme le numérateur précédent.

Fin du Calcul des Chances au moyen de l'Algebre.

CALCUL DES LOTERIES ET DES INTÉRÊTS AU MOYEN DE L'ALGÈBRE ET DE L'ARITHMÉTIQUE.

Premier Problème.

Étant donné une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont de grands nombres, en trouver une autre un peu plus petite ou un peu plus grande que la fraction donnée et qui en diffère aussi peu que possible, le dénominateur de cette seconde fraction ne devant pas dépasser un certain nombre donné. — Ce Problème ne doit pas être résolu par tâtonnements, mais d'après une règle mathématique.

Ce Problème se présente dans de nombreux calculs, qui conduisent à des fractions composées de fort grands nombres et qui exigent cependant une solution passablement élégante. Sa solution sert aussi à nous faire connaître de petits nombres correspondant aux chances des joueurs et dont les rapports diffèrent peu de ceux des grands nombres qu'on avait trouvés. Pour résoudre ce Problème, nous avons inventé la méthode suivante que nous expliquerons à l'aide des deux Exemples suivants.

Premier Exemple.

Étant donné la fraction $\frac{10240}{19000}$, on demande de trouver la fraction dont le dénominateur est inférieur à 100 qui s'en approche le plus; et de même la fraction correspondante dont le dénominateur est inférieur à 1000.

Divisez à cet effet le dénominateur par le numérateur, puis le numérateur par le reste de la division précédente, et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous trouvez enfin le reste 1.

2751	2494	257	181	76	29
19100 / 16249 { 1	16249 / 2751 { 5	2751 / 2494 { 1	2494 / 257 { 9	257 / 181 { 1	181 / 76 { 2

18	11	7	4	3	1
76 / 29 { 2	29 / 18 { 1	18 / 11 { 1	11 / 7 { 1	7 / 4 { 1	4 / 3 { 1.

Den.		Num.		
1				
—	—	1		
1	—	1	G ———	2751
		5		
6	—	5	P ———	2494
		1		
7	—	6	G ———	257
		9		
69	—	59	P ———	181
		1		
76	—	65	G ———	76

On commence par écrire l'unité. On la multiplie par le quotient de la première division. A côté de ce produit on écrit l'unité. On a ainsi la première fraction, laquelle ici se réduit précisément à l'unité. Elle est plus grande que la fraction donnée; c'est pourquoi nous l'avons désignée par la lettre G. Le numérateur est écrit à droite et le dénominateur à gauche. En multipliant l'un et l'autre par le quotient de la deuxième division, et en y ajoutant les nombres qui composent la première fraction, à savoir le numérateur au numérateur et le dénominateur au dénominateur, on obtient $\frac{5}{6}$, ce qui est plus petit que la fraction donnée. C'est pourquoi nous avons désigné cette fraction par la lettre P.

On multiplie ensuite par le quotient de la troisième division et on y ajoute comme précédemment les nombres qui composent la fraction précédente. Cette dernière fraction est multipliée par le quotient de la quatrième division, c.à.d. par 9. On obtient $9 \times 7 = 63$, $63 + 6 = 69$; et $9 \times 6 = 54$, $54 + 5 = 59$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve le dernier des dénominateurs qui ne dépassent pas le nombre donné. On obtient ainsi $\frac{59}{69}$. C'est là la fraction, un peu inférieure à la fraction donnée, qui en diffère moins que toute autre fraction inférieure à la fraction primitive et dont le dénominateur est plus petit que le nombre 100. La fraction $\frac{65}{76}$ est parmi toutes celles dont le dénominateur est plus petit que 100 et qui surpassent quelque peu la fraction donnée celle qui en diffère le moins.

Le calcul suivant sert à chercher la fraction qui approche le plus de la fraction donnée et dont le dénominateur est inférieur à 1000.

G	76 —	65 — —	76
		2	
P	221 —	189 — —	29
		2	
G	518 —	443 — —	18
		1	
P	739 —	632 — —	11
		1	
G	1257 —	1075 — —	7

On trouve que les deux fractions dont le dénominateur est inférieur à 1000 et qui s'approchent le plus de la fraction donnée sont $\frac{632}{739}$ et $\frac{443}{518}$. La première est un peu plus petite et la seconde un peu plus grande que la fraction donnée. La fraction qui suit a un dénominateur supérieur à 1000 et ne convient donc pas. Les nombres qui composent la dernière colonne sont les différences des produits qu'on obtient en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction donnée respectivement par le dénominateur et le numérateur des fractions qui s'en approchent. Ces nombres sont aussi les restes des divisions successives.

Deuxième Exemple.

On donne la fraction $\frac{18533}{79819}$ et on demande quelles sont les fractions qui s'en approchent le plus et dont le dénominateur est inférieur à 100 ou à 1000.

$$\overset{5867}{\frown}\ \begin{matrix}79819\\18533\end{matrix}\Big\}\,4 \qquad \overset{1472}{\frown}\ \begin{matrix}18533\\5867\end{matrix}\Big\}\,3 \qquad \overset{1271}{\frown}\ \begin{matrix}5867\\1472\end{matrix}\Big\}\,3 \qquad \overset{201}{\frown}\ \begin{matrix}1472\\1271\end{matrix}\Big\}\,1 \qquad \overset{65}{\frown}\ \begin{matrix}1271\\201\end{matrix}\Big\}\,6$$

$$\overset{6}{\frown}\ \begin{matrix}201\\65\end{matrix}\Big\}\,3 \qquad \overset{5}{\frown}\ \begin{matrix}65\\6\end{matrix}\Big\}\,10 \qquad \overset{1}{\frown}\ \begin{matrix}6\\5\end{matrix}\Big\}\,1$$

Lorsqu'on est parvenu à la fraction $\frac{13}{56}$ on devrait multiplier par 6, parce que 6 est le quotient de la division suivante; mais on dépasserait ainsi de beaucoup le nombre 100. Mais si l'on retranche 43 de 100—1, il reste 56. En divisant ce dernier nombre par 56 on trouve le quotient 1. Multipliez donc par 1 et ajoutez aux produits les nombres qui composent la fraction précédente; vous trouverez ainsi $\frac{23}{99}$, fraction un peu plus grande que la fraction donnée. La fraction $\frac{13}{56}$ est un peu plus petite que la fraction donnée. Ce sont là les deux fractions cherchées.

	1			
	—		4	
G	4	——	1	
				3
P	13	——	3	
				3
G	43	——	10	
				1
P	56	——	13	
				1
G	99	——	23	

Cherchons aussi la fraction qui s'approche le plus de la fraction donnée et dont le dénominateur est inférieur à 1000.

Lorsqu'on est parvenu aux nombres 88 et 379, on devrait multiplier par 3, mais alors le deuxième produit surpasserait le nombre 1000. Retranchez donc 56 de 999; il reste 923. Le nombre 379 y va plus de 2 fois. Il faut donc multiplier par 2. On trouve ainsi les deux fractions $\frac{189}{814}$ et $\frac{88}{379}$ qui satisfont au Problème. La première est un peu plus petite et la seconde un peu plus grande que la fraction primitive.

P	56	——	33	
				6
G	379	——	88	
				2
P	814	——	189.	

Ce Problème nous a conduit au Problème suivant.

Deuxième Problème.

Trouver des nombres qui, lorsqu'on les divise par des nombres premiers donnés, laissent après la division des restes donnés.

Ce même Problème se trouve à la page 371 1) des ,,Exercices mathématiques'' du Professeur F. VAN SCHOOTEN. On y trouve une solution par NICOLAS HUYBERTS VAN PERSIJN, arpenteur à Naarden. Le Professeur PRESTET l'a citée à la page 339 du 2ième volume des ,,Nouveaux Éléments de Mathématiques'' 2), où il dit que cette solution est ingénieuse. Mais elle ne saurait servir pour de grands nombres: les plus grands diviseurs considérés là sont 7, 11 et 13. Il faut observer aussi que d'après cette méthode l'on doit *deviner* combien de fois il faut prendre le nombre 12 pour

1) p. 380 dans l'édition de 1660 (N. d. tr.).

2) Paris, 1694. (N. d. tr.).

que le reste, lorsqu'on divise le produit par 13, soit 1. Mais si l'on avait pris comme diviseurs les nombres 20289, 29983, 91813 et 95003 et qu'on voulait trouver le multiplicateur de 95003, il s'agirait encore, si l'on voulait suivre la méthode de ces Messieurs, de trouver un nombre tel qu'en le multipliant par 91286 et en le divisant ensuite par 95003 on obtiendrait le reste 1.

Ce n'est qu'avec beaucoup de peine qu'on pourrait deviner que le nombre en question est 91757.

Par ,,multiplicateurs'' nous entendons des nombres tels qu'il reste 1 lorsqu'on les divise par le nombre dont ils sont multiplicateurs, tandis que tous les autres diviseurs y vont sans reste.

Nous avons inventé la règle suivante qui permet de résoudre le Problème mathématiquement. Nous y avons distingué deux cas. Le premier est celui où le produit de tous les diviseurs à l'exception d'un seul, est plus grand que ce diviseur-là qui est celui dont on veut chercher le multiplicateur. Le second cas est celui où ce produit est plus petit. Ce qui est écrit entre parenthèses se rapporte à ce dernier cas.

Règle pour trouver les Multiplicateurs.

Appelons A le diviseur dont on cherche le multiplicateur, et B le produit des autres diviseurs.

Divisez A par B, ou B par A, suivant qu'on a $A > B$ ou $A < B$. Divisez le diviseur donné par le reste de cette division, et ainsi de suite comme plus haut, jusqu'à ce que vous arrivez à une division qui donne le reste 1. Multipliez ensuite l'unité par le quotient de la deuxième division, et multipliez ce produit par le quotient de la troisième division. Ajoutez-y le nombre écrit au-dessus du nombre trouvé, comme cela a été fait au Problème précédent. On continue de la même manière à multiplier par les quotients de toutes les divisions en ajoutant chaque fois le nombre écrit au-dessus. Nous appellerons C le nombre trouvé finalement. Si l'on a fait en tout un nombre impair de divisions, il faut multiplier C par B (ou bien, dans le second cas il faut retrancher C de B, multiplier la différence par A et ajouter l'unité au produit). On obtient ainsi le multiplicateur demandé.

Mais si le nombre des divisions est pair, il faut retrancher C de A et multiplier le reste par B (ou bien, dans le second cas, multiplier C par A et ajouter l'unité au produit). On obtient ainsi le multiplicateur demandé.

Premier Exemple.

(Premier Cas et Nombre impair de Divisions).

Soient 101, 141 et 133 les diviseurs. Pour trouver le multiplicateur de 141, multipliez 101 par 133, ce qui donne 13433. Il s'agit maintenant de trouver un nombre qui est un multiple de 13433 et qui, lorsqu'on le divise par 141, donne un reste 1.

	38		27		11		5		1	
B	13433	95	141	3	38	1	27	2	11	2
A	141		38		27		11		5	

1
3 (1)
4 (2)
11 (2)
C 26

Multipliez 26 par 13433. Il vient 349528. C'est là le multiplicateur de 141.

Deuxième Exemple.

(Second Cas et Nombre pair de Divisions).

Soient 20289, 29983, 91813 et 95003 les diviseurs. Pour trouver le multiplicateur de ce dernier nombre, multipliez entre eux les trois premiers nombres. Il viendra 55852151212731.

	91286		3717		2078	
B	55852151212731	587898815	95003	1	91286	24
A	95003		91286		3717	

1639		439		322		117		88		29		1	
3717	1	2078	1	1639	3	439	1	322	2	117	1	88	3
2078		1639		439		322		117		88		29	

1
1 (1)
25 (24)
26 (1)
51 (1)
179 (3)
230 (1)
639 (2)
869 (1)
C 3246 (3)

Retranchez C de A, la différence est 91757. Multipliez ce nombre par 55852151212731. Il viendra 5124825838826558367. C'est là le multiplicateur demandé.

Troisième Exemple.

(Second Cas et Nombre impair de Divisions).

Soient 7, 13 et 801 les diviseurs. Pour trouver le multiplicateur de 801, cherchez un nombre qui divisé par 91 donne un reste zéro et qui donne un reste 1, lorsqu'on le divise par 801.

	73		18		1		
A	801	8	91	1	73	4	1
B	91		73		18		1
						C	5

Retranchez C de B. Multipliez le reste 86 par 801, ce qui donne 68886. Ajoutez-y l'unité, vous obtiendrez 68887, ce qui est le multiplicateur demandé.

Quatrième Exemple.

(Second Cas et Nombre pair de Divisions).

Soient 7, 11 et 941 les diviseurs. On demande de trouver le multiplicateur de ce dernier nombre.

	17		9		8		1		
A	941	12	77	4	17	1	9	1	1
B	77		17		9		8		4
									5
								C	9

Multipliez C par A, vous obtiendrez 8469. Ajoutez-y l'unité. Il vient 8470. C'est là le multiplicateur demandé.

Cinquième Exemple.

On peut trouver les multiplicateurs à l'aide des quotients de toutes les divisions. Nous prendrons le premier Exemple.

1
95
286
381
1048
2477

Multipliez ce nombre 2477 par 141, ce qui donne 349257, ajoutez-y l'unité, vous trouverez ainsi 349258, comme auparavant. C'est le multiplicateur demandé.

Sixième Exemple.

Trouvez un nombre qui donne le reste 5, lorsqu'on le divise par 23 et le reste 17 lorsqu'on le divise par 31.

Retranchez 17 de ce nombre. Il s'en faut alors de 12 que la différence soit un multiple de 23. En retranchant 12 de 23, on trouve 11. Il suffit donc de trouver un nombre qui, divisé par 23, donne un reste 11 et qui est un multiple de 31, car après avoir trouvé ce nombre, on y ajoute 17 et on a le résultat demandé.

Nous trouverons ce nombre sans chercher aucun multiplicateur.

	8		7		1		
23 — 11	31	1	23	2	8	1	1
31 — 0	23		8		7		2
							3

Multipliez 3 par 11. Il vient 33. Divisez 33 par 23. Le reste est 10. Multipliez 10 par 31 ; il vient 310. Ajoutez-y 17. Vous obtiendrez ainsi 327, ce qui est le nombre demandé.

Septième Exemple.

Trouvez un nombre qui, divisé par 13, donne un reste 5, et qui, divisé par 19 et 31, donne les restes 3 et 8 respectivement.

D'après la méthode de l'Exemple précédent, on trouvera 174 pour le plus petit des nombres qui divisés par 13 donnent le reste 5 et, divisés par 19, le reste 3. Or, $13 \times 19 = 274$. Cherchez donc d'après la même méthode un nombre qui, divisé par 247, donne le reste 174 et, divisé par 31, le reste 8. On trouvera que 2891 est le nombre demandé. Nous n'avons pris ici ni de grands nombres, ni un nombre considérable de diviseurs. En effet, si les diviseurs étaient très-grands et très-nombreux, la règle resterait néanmoins la même.

On peut obtenir les mêmes résultats à l'aide d'une formule algébrique.

Huitième Exemple.

Quelqu'un possède un certain nombre de florins. Il en dépense la $17^{\text{ième}}$ partie $+ \frac{10}{17}$ fl. ; ensuite la $23^{\text{ième}}$ partie du reste $+ \frac{20}{23}$ fl., puis la $31^{\text{ième}}$ partie du reste $+ \frac{11}{31}$ fl., puis $\frac{5}{47}$ du reste $+ \frac{19}{47}$ fl., puis $\frac{37}{101}$ du reste $+ \frac{32}{101}$ fl., et enfin $\frac{3}{7}$ du reste $+ \frac{5}{7}$ fl. Si tout l'ar-

gent qu'il a dépensé ou qu'il possède encore est chaque fois exprimé par un nombre entier de florins, on demande combien de florins il a bien pu avoir.

A l'aide des Exemples précédents on trouvera aisément que toutes les réponses sont renfermées dans une progression arithmétique infinie, dont le premier terme est 127983 et la raison 57538387.

Troisième Problème.

Calculer avec une grande approximation l'intérêt composé pour un grand nombre d'années, sans se servir d'aucune table.

Premier Exemple.

Que deviendra au bout de 100 ans un capital de 100 florins, lorsque l'intérêt est de $6\frac{1}{4}$ % par an et qu'on prend l'intérêt composé? Le résultat ne doit pas différer de plus de $\frac{1}{50}$ denier du résultat véritable.

	$\frac{100}{1}$	$\frac{99}{2}$	$\frac{98}{3}$	$\frac{97}{4}$	$\frac{96}{5}$	$\frac{95}{6}$	$\frac{94}{7}$	$\frac{93}{8}$	$\frac{92}{9}$	$\frac{91}{10}$	$\frac{90}{11}$	$\frac{89}{12}$	$\frac{88}{13}$
16	$\frac{100}{}$	$\frac{49\frac{1}{2}}{}$	$\frac{32\frac{2}{3}}{}$	$\frac{24\frac{1}{4}}{}$	$\frac{19\frac{1}{5}}{}$	$\frac{15\frac{5}{6}}{}$	$\frac{13\frac{3}{7}}{}$	$\frac{11\frac{5}{8}}{}$	$\frac{10\frac{2}{9}}{}$	$\frac{9\frac{1}{10}}{}$	$\frac{8\frac{2}{11}}{}$	$\frac{7\frac{5}{12}}{}$	$\frac{6\frac{10}{13}}{}$
	$6\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{32}$	$2\frac{1}{24}$	$1\frac{33}{64}$	$1\frac{1}{5}$	$\frac{95}{96}$	$\frac{47}{56}$	$\frac{93}{128}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{91}{160}$	$\frac{45}{88}$	$\frac{89}{192}$	$\frac{11}{20}$

$\frac{87}{14}$	$\frac{86}{15}$	$\frac{85}{16}$	$\frac{84}{17}$	$\frac{83}{18}$	$\frac{82}{19}$	$\frac{81}{20}$	$\frac{80}{21}$	$\frac{79}{22}$	$\frac{78}{23}$	$\frac{77}{24}$	$\frac{76}{25}$	etc.
16	$6\frac{3}{14}$	$5\frac{11}{15}$	$5\frac{5}{16}$	$4\frac{16}{17}$	$4\frac{11}{18}$	$4\frac{6}{19}$	$4\frac{1}{20}$	$3\frac{17}{21}$	$3\frac{13}{22}$	$3\frac{9}{23}$	$3\frac{5}{24}$	$3\frac{1}{25}$
	$\frac{87}{224}$	$\frac{43}{120}$	$\frac{85}{256}$	$\frac{21}{68}$	$\frac{83}{288}$	$\frac{41}{152}$	$\frac{81}{320}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{79}{352}$	$\frac{39}{184}$	$\frac{77}{384}$	$\frac{19}{100}$

Multipliez 100 par $6\frac{1}{4}$, ensuite le produit par $3\frac{3}{32}$ et ainsi de suite; nous avons développé le calcul ci-dessous pour faire voir comment on doit conduire les opérations en pratique. Nous avons conservé 5 chiffres après ceux qui expriment les nombres entiers.

	100 1
	4
	625 3
	3 32
	1875
	35859375
	193359375
24	386718750
1	8056640
64	394775390
32	197387695
1	6168365
5	598331450
1	119666290
96	717997740
1	7479143
56	710518597
28	355259299
14	177629649
4	50751328
1	12687832
	596328108

128	596328108
64	298164054
16	74541014
8	37270507
4	18635254
1	4658813
36	433269642
18	216634821
4	48141071
1	12035268
160	276811160
80	138405580
10	17300697
1	1730070
88	157436347
44	78718173
1	1789050
192	80507223
64	26835741
16	6708935
8	3354468
1	419308
	37318452

	37318452 11
	410502972
224	15788576
56	3947144
28	1973572
2	140969
1	70485
120	6132170
40	2044056
2	102203
1	51102
256	2197361
64	549340
16	137345
4	34346
1	8587
68	729618
17	182404
4	42919
	225323

100		288	225323
625		72	56331
1933	59375	8	6259
3947	75390	2	1565
5983	31450	1	1282
7179	97740	152	64937
7105	18597	19	8117
5963	28108	19	8117
4332	69642	3	1282
2768	11160	320	17516
1574	36347	80	4379
805	07223	1	55
373	18452		4434
157	88576		22170
61	32170		1055
21	97361		3
7	29618		237
2	25323		9243
	64937		50
	17516		10
	4434		190
	1055		2
	237		
	50		
	10		
	2		
42943	14773		
	20		
2	95460		
	16		
15	27360		

$\frac{77}{324} = \frac{1}{5}$ à peu près

On trouve donc fl. 42943, 2 sous et 15 $\frac{3}{11}$ deniers à fort peu près.

Deuxième Exemple.

Que sera devenu au bout de 359 ans un capital de 100 florins, lorsque l'intérêt annuel est de 3 % et qu'on prend l'intérêt composé? On demande de calculer le résultat avec une exactitude

telle qu'on peut être assuré de ne pas commettre une erreur de $\frac{1}{100000}$ florin.

$\frac{359}{1077}$ 3

1077	1074	1071	1068	1065	1062	1059	1056
1	2	3	4	5	6	7	8
1077	537	357	267	213	177	$151\frac{2}{7}$	132
1053	1050	1047	1044	1041	1038	1035	1032
9	10	11	12	13	14	15	16
117	105	$95\frac{2}{11}$	87	$80\frac{1}{13}$	$74\frac{1}{7}$	69	$64\frac{1}{2}$
1029	1026	1023	1020	1017	1014	1011	1008
17	18	19	20	21	22	23	24
$60\frac{9}{17}$	57	$53\frac{16}{19}$	51	$48\frac{3}{7}$	$46\frac{1}{11}$	$43\frac{22}{23}$	42
1005	1002	999	996	993	990	987	984
25	26	27	28	29	30	31	32
$40\frac{1}{5}$	$38\frac{7}{13}$	37	$35\frac{4}{7}$	$34\frac{7}{29}$	33	$31\frac{26}{31}$	$30\frac{1}{4}$
981	978	975	972	969	966	963	960
33	34	35	36	37	38	39	40
$29\frac{8}{11}$	$28\frac{13}{17}$	$27\frac{6}{7}$	27	$26\frac{7}{37}$	$25\frac{8}{19}$	$24\frac{9}{13}$	24

Multipliez 100 par 1077, le produit par 537, ce dernier produit par 357, puis par 267 et ainsi de suite, vous trouverez ainsi les nombres écrits dans la table ci-dessous. Aussi longtemps qu'on multiplie par des nombres supérieurs à 100, le produit augmente de plus en plus. Mais dès qu'on multiplie par des nombres inférieurs à 100 le produit diminue, car les vrais multiplicateurs sont les 100ièmes parties de ces nombres. Cela ne fait d'alleurs aucune différence dans les calculs : il suffit de prendre les premiers chiffres pour voir comment les nombres doivent être écrits les uns sous les autres. Cela se voit aisément : lorsqu'un nombre doit être multiplié par 213 et être divisé ensuite par 100, on sait que le résultat doit être un peu plus de deux fois plus grand. De même, lorsqu'un nombre doit être multiplié par 51 et divisé ensuite par 100, le résultat doit être un peu plus de la moitié. Nous avons fait ici le culcul jusqu'aux 100000ièmes parties d'un florin. Si l'on

100	
1077	
5783	49
20647	0593
55127	64833
117421	890945
207836	746973
314427	307206
415044	045512
485601	533249
509881	609911
485314	586887
422223	690592
338103	739928
250679	772889
172969	043294
111565	032924
67529	658164
38491	905153
20724	852091
10569	674566
5118	742397
2359	274905
1037	055186
435	563178
175	096398
67	479458
24	967399
8	881260
3	041066
1	003552
	319518
	98252
	29208
	8401
	2340
	632
	165
	42
	10
	3
fl. 4060351	851284

avait pris un nombre de chiffres plus grand, on aurait trouvé un résultat plus exact encore, et le travail n'aurait pas été beaucoup plus considérable. — Nous avons écrit à la sixième place derrière la ligne un chiffre plus élevé d'une unité lorsque nous trouvions à la septième place un chiffre supérieur à 5; et nous avons négligé à cet endroit les chiffres inférieurs à 5.

L'erreur pourrait être de 1 on 2 millioniѐmes, mais non pas de 10 millionièmes. C'est pourquoi l'on est assuré que le résultat trouvé diffère du résultat véritable par moins de $\frac{1}{100000}$ florin, dans l'hypothèse que les multiplications et les additions sont correctes. Aussi longtemps que les nombres augmentent encore, on prend dans les produits, pour éviter toute incorrection, une ou deux chiffres de plus; mais lorsqu'ils diminuent, il suffit de prendre les nombres eux-mêmes, ce qui donne cependant encore deux chiffres de plus qu'il ne faut. On commence par écrire tous ces chiffres.

La réponse est donc: 4060351 florins, 17 sous, $4\frac{68}{625}$ deniers. Il me semble bien que l'erreur est inférieure à $\frac{1}{625}$ denier.

Troisième Exemple.

Nous avons résolu le même Problème à l'aide de logarithmes. Il faut chercher le logarithme de 103, en retrancher celui de 100, et multiplier le reste par 459. Il vient ainsi 6, 60856367089. Le nombre qui correspond à ce logarithme donne à peu près 4060351 florins, 16 sous, 13 deniers, ce qui diffère par 7 deniers du résultat précédent. En se servant des grandes tables de logarithmes, on

trouvera une différence encore plus petite. Mais pour bien faire comprendre la méthode précédente, nous ajouterons ici le calcul algébrique, quoique nous ayons inventé cette méthode sans le secours de l'algèbre.

En posant 100 = a, 3 = b, 359 ans = c, le nombre cherché = x, on a le tableau suivant

après c années x ⁊ a comptant
comptant a ⁊ a + b après une année
après 1 année a ⁊ a + b après deux années
après 2 années a ⁊ a + b après trois années
après 3 années a ∠ a + b après quatre années
Etc. Etc.

Chaque colonne doit avoir c + 1 termes, et le produit de tous les termes des deux colonnes doit être le même. On trouve de cette façon

$$x = a + c \times b + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{1} \times \frac{bb}{a} + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{2} \times \frac{c-2}{3} \times \frac{b^3}{aa} + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{2} \times \frac{c-2}{3} \times \frac{c-3}{4} \times \frac{b^4}{a^3} + \frac{c}{1} \times \frac{c-1}{2} \times \frac{c-2}{3} \times \frac{c-3}{4} \times \frac{c-4}{5} \times \frac{b^5}{a^4} + \text{etc.}$$

Le nombre des termes doit être a. De cette formule on peut tirer la règle précédente; en effet, on voit clairement qu'un terme qui occupe le rang p, doit être multiplié par $\frac{c+1-p}{p} \times \frac{b}{a}$ pour nous faire obtenir le terme suivant.

Quatrième Problème.

Une certaine somme est placée à intérêt. En même temps on se procure une rente viagère pour une somme égale et aussitôt qu'on reçoit une rente on la place à intérêt composé. Après un certain laps de temps les deux sommes sont égales on bien l'une d'elle surpasse l'autre d'une quantité connue. On demande la grandeur des deux sommes; ou bien, si cette grandeur est donnée, on demande quel a été le taux des rentes viagères.

Premier Exemple.

On a placé pour deux enfants A et B une certaine somme d'argent, à savoir 1388 florins pour chacun d'eux. Le capital de A

est perdu, mais il reçoit chaque année $4\frac{7}{16}$ %. Il place immédiatement cette rente à un intérêt composé de $4\frac{1}{3}$ %. Le capital de B est placé à un intérêt composé de $4\frac{1}{3}$ %. Après un certain laps de temps on trouve que leurs capitaux sont précisément égaux. On demande ce que sont devenu les capitaux des deux enfants et pendant combien de temps ils ont produit leurs rentes. Réponse: 59128 fl, 16 sous; 88 années et un peu plus de 5 mois.

En posant 1388 = a, le nombre d'années = n, $4\frac{7}{16} = y$, $4\frac{1}{3} = x$, 100 = b, on voit qu' après n années à x % (intérêt composé) le capital sera devenu $\frac{\overline{b+x}^{n}}{b^{n}} \times a$. Or, $b : y = a : \frac{ay}{b}$. Le dernier terme représente la rente viagère qu'on reçoit annuellement. Et comme on place cet argent à un intérêt de x %, la somme totale qu'on reçoit des rentes viagères se compose d'une progression géométrique, dont le premier terme est $\frac{ay}{b}$, la raison $\frac{b+x}{b}$ et le nombre des termes n — 1. Le dernier terme est donc $\frac{ay}{b} \times \frac{\overline{b+x}^{n-1}}{b^{n-1}}$. Pour trouver la somme de cette progression, prenez le terme qui suit le dernier, c. à. d. le terme $\frac{ay}{b} \times \frac{\overline{b+x}^{n}}{b^{n}}$. Posez alors $\frac{\overline{b+x}^{n}}{b^{n}} = z$. Ce terme devient donc $\frac{ayz}{b}$. Retranchez-en le premier terme $\frac{ay}{b}$. Il reste $\frac{ayz - ay}{b}$. Ce reste, divisé par la raison de la progression diminuée d'une unité, c. à. d. par $\frac{x}{b}$, donne $\frac{ayz - ay}{x}$. Ce quotient doit être égal à az $\left(\text{ou à } \frac{\overline{b+x}^{n}}{b^{n}} \times a\right)$. On tire de là $z = \frac{y}{y-x}$ ou $az = \frac{ay}{y-x}$. On voit par là que la règle, facile à appliquer, est la suivante: il faut multiplier l'argent qu'on a au commencement par le taux des rentes viagères et diviser le produit par la différence des taux des rentes viagères et de l'intérêt respectivement. On trouve ainsi le capital qu'on possède à la fin. Quant au temps, on le trouve à l'aide de logarithmes comme dans l'Exemple suivant.

Deuxième Exemple.

Deux personnes A et B possédaient chacun une tonne d'or. A

plaça son argent à un intérêt composé de $5\frac{2212}{6015}$ %. B en même temps céda son capital, à condition d'en tirer, lui ou ses descendants, une rente de $5\frac{2643}{7187}$ %. Les rentes ainsi obtenues sont immédiatement placées à un intérêt composé de $5\frac{2212}{6015}$ % par an. Après un certain laps de temps les descendants des deux personnes se trouvent en possession de capitaux égaux, provenant chacun de la tonne d'or. On demande combien de temps s'est écoulé depuis que leurs ancêtres placèrent chacun leur tonne d'or à intérêt, et quel est le capital obtenu par ce placement?

$5\frac{2643}{7187}$

$5\frac{2212}{6015}$ soustr.

$5\frac{2643}{7187} = \frac{38578}{7187}$ $\frac{1}{43229805}$

Le capital est devenu 2320466670 fois plus grand, de sorte qu'on a gagné 2320466669 tonnes d'or.

Pour trouver le temps, cherchez le logarithme de 2320466670 qui est 9, 36557534796. Cherchez ensuite le logarithme de $105\frac{2212}{6015}$ et retranchez-en le logarithme de 100; il reste 0, 02270774001. Divisez le premier logarithme par ce reste, vous trouverez ainsi 412 années et un peu moins de $5\frac{1}{2}$ mois. C'est ce qu'il fallait trouver.

Nous développerons ici la solution d'un autre problème encore dans le but de trouver précisément la partie en question de l'année, et nous vérifierons l'exactitude du résultat. Nous prendrons pour le taux des rentes viagères un nombre entier lequel sera choisi expressément en-dehors du cours ordinaire, pour que nous obtenions de plus petites fractions; en effet, en prenant un intérêt de 5 % et un taux de 10 % pour les rentes viagères (ce qui d'ailleurs serait encore trop) nous devrions calculer l'intérêt composé pour un temps de 14 ans, ce qui donne de grandes fractions.

A cède un capital de 30000 florins, pour obtenir une rente viagère de 25 %; quant aux rentes qu'il reçoit, il les place de nouveau à un intérêt composé de 10 % par an. B en même

temps place 30000 florins à un intérêt composé de 10 % par an. Après un certain laps de temps ils se trouvent avoir des capitaux égaux. On demande quels sont ces capitaux et combien de temps s'est écoulé depuis qu'ils ont placé leur argent.

25
10
25
divisé par 15
$1\frac{2}{3}$ Le capital est devenu $1\frac{2}{3}$ fois plus grand.
30000
——— mult.
50000. Le capital de chacun d'eux est 50000.

Log. 110 = 2,0413927
Log. 100 = 2,0000000
0,0413927

$1\frac{2}{3}$
5 ; log. 5 = 0,6989700
3 ; log. 3 = 0,4771212
$1\frac{2}{3}$; log. $1\frac{2}{3}$ = 0,2218488

Ceci, divisé par 0,0413927, donne $5\frac{148853}{413927}$ années.

Nous trouvons ainsi une valeur approchée, mais non pas la valeur exacte de la fraction. Pour trouver cette dernière agissez comme suit.

Calculez à l'aide de la „règle de la chaîne" ce que deviennent 30000 florins au bout de 5 ans, à un intérêt composé de 10 %.

	A		B	
comptant	100		110	après 1 an
après 1 an	100	/	110	après 2 ans
après 2 ans	100	/	110	après 3 ans
après 3 ans	100	/	110	après 4 ans
après 4 ans	100	/	110	après 5 ans
après 5 ans.		/	30000	comptant

En divisant le produit de la colonne B par celui de la colonne A, on trouve 48315 florins et 6 sous au bout de 5 ans. Si ce capital était placé au même intérêt encore une année, on obtiendrait encore une rente de 4831 florins et $10\frac{3}{5}$ sous.

fl. 50000 : —
fl. 48315 : 6
——————— soustr.
fl. 1684 : 14

Intérêt An

fl. 4831 : $10\frac{3}{5}$ — 1 — fl. 1684 : 14. On trouve $\frac{168470}{483153}$ an, à ajouter aux 5 années. Le temps exact est donc de 5 ans et de 4 $\frac{29676}{161051}$ mois.

Vérification.

Elle consiste à faire voir que les rentes viagères obtenues pendant ce temps pour le capital de fl. 30000, et augmentées de leurs intérêts, produisent elles-aussi un capital de fl. 50000 exactement.

	fl. 30000
	25
Rentes après 1 an	7500 | 00
Intérêt de 10 %	750
Rentes après 2 ans	7500
On a au bout de 2 ans fl.	1575 | 0 : —
Intérêt de 10 %	1575 : —
Rentes après 3 ans	7500 : —
On a au bout de 3 ans fl.	24825 : —
Intérêt de 10 %	2482 : 10
Rentes après 4 ans	7500 : —
On a au bout de 4 ans fl.	34807 : 10
Intérêt de 10 %	3480 : 15
Rentes après 5 ans	7500
On a au bout de 5 ans fl.	45788 : 5

Si cette dernière somme était placée à intérêt encore un an, on recevrait encore une rente de fl. 4578, $16\frac{1}{2}$ sous et une rente viagère de fl. 7500, ce qui fait ensemble 12078 fl. et $16\frac{1}{2}$ sous.

An An

1 — 12078 fl. $16\frac{1}{2}$ sous — $\frac{168470}{483153}$

Il vient fl. 4211 : 15. C'est là ce qu'on reçoit en cette partie de l'année. En y ajoutant les fl. 45788 : 5 reçus en 5 ans, dont nous avons parlé plus haut, nous trouvons fl. 50000 comme auparavant.

Troisième Exemple.

A et B possèdent chacun 4096 florins. A place son argent à un intérêt composé de $4\frac{1}{2}$ % par an, B cède son capital pour obtenir une rente viagère de $5\frac{3}{8}$ % par an; il place ces rentes à un intérêt composé de $4\frac{1}{2}$ % par an. Après un certain laps de temps, A possède fl. 100 plus que B. On demande quel est alors le capital de chacun d'eux.

On a alors $\frac{ayz - ay}{x} = az - b$. On tire de là $az = \frac{ay - bx}{y - x}$ ou $= a + \overline{a - b} \times \frac{x}{y - x}$. Or $a = 4096$, $b = 100$, $x = 4\frac{1}{2}$ et $y = 5\frac{3}{8}$. Par conséquent $az = 24646\frac{6}{7}$ est le capital de A, $24546\frac{6}{7}$ celui de B. Le temps est égal à un plus de 40 ans et 9 mois.

Quatrième Exemple.

Deux personnes possèdent chacune 3100 florins. La première place son argent à un intérêt composé de $4\frac{1}{2}$ %, l'autre cède son capital pour obtenir une rente viagère. Cette dernière place ses rentes à un intérêt composé de $4\frac{1}{2}$ %. Au bout d'un certain temps, elles possèdent l'une et l'autre 28336 florins. On demande quel est le taux des rentes viagères.

Calcul arithmétique.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 28336 \\ 3100 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9\frac{109}{775} \\ 1 \\ \hline 8\frac{109}{775} \end{array} \right. \begin{array}{l} 4\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} 8\frac{109}{775} \\ \frac{6309}{775} \end{array} \Big\} \begin{array}{l} 4\frac{1}{2} \\ 775 \\ 1402 \end{array}$$

$5\frac{57}{701}$ %. C'est le résultat demandé.

Cinquième Exemple.

Quelqu'un divise son capital qui est de 2000 florins, en deux parties égales, dont il place l'une à un intérêt composé de $3\frac{1}{2}$ % par an et dont il cède l'autre pour obtenir une rente viagère de 11 %. Il place ces rentes de nouveau à un intérêt de $3\frac{1}{2}$ %, et constate enfin que le capital qu'il a obtenu à l'aide des rentes

viagères est trois fois plus grand que celui qui est produit par les intérêts de la première partie du capital primitif. On demande quelle est alors sa fortune? Rép. 88000 florins.

Si l'on pose $3 = p$, on a $a\,z = \frac{a\,y}{y - p\,x}$. Quant au temps, je crois qu'il est de 69 ans et de 9 mois à-peu-près.

Sixième Exemple.

Deux personnes A et B possèdent chacun 7000 florins. A place son argent à un intérêt composé de 5 % par an, B cède son capital pour obtenir une rente viagère de 6 % par an. Il place ses rentes de nouveau à un intérêt composé de 5 %. Après un certain laps de temps A a deux fois plus d'argent que B. On demande quel sera alors le capital de chacun d'eux. Rép. A a 12000 florins, B en a 6000.

L'équation est $a\,z = \frac{a\,y\,p}{y\,p - x}$. On a posé $2 = p$. Il est évident que dans ce problème $p\,y$ doit être plus grand que x, et dans le problème précédent y plus grand que $p\,x$.

Septième Exemple.

Supposons que dans le deuxième Exemple on eût demandé le temps où les héritiers de B posséderont $273729\frac{1}{4}$ fl. de plus que ceux de A. Posons $273729\frac{1}{4} = b$. Nous avons donc $a\,z = a + \overline{a + b} \times \frac{x}{y - x}$. Je crois que l'on trouverait un temps de 431 années, 8 mois, etc., et que le capital de A serait de $635179601329097\frac{1}{2}$ fl.

Cinquième Problème.

On demande de réduire une somme due au comptant à diverses sommes égales, à payer plus tard. L'intérêt est composé.

Nous avons trouvé précédemment $z = \frac{y}{y - x}$. Alors $y = \frac{z\,x}{z - 1}$. Multipliez ceci par a et divisez-le par b (nous avons posé $100 = b$); la somme à payer annuellement est donc $\frac{z\,x}{z - 1} \times \frac{a}{b}$. Remplacez z

par sa valeur $\frac{\overline{b+x}^n}{b^n}$. Vous trouverez ainsi pour la somme à payer annuellement

$$\frac{\frac{\overline{b+x}^n}{b} \times x}{\frac{\overline{b+x}^n - b^n}{b^n}} \times \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{\overline{b+x}^n \times x}{\overline{b+x}^n - b^n} \times \frac{a}{b}.$$

Premier Exemple.

Quelqu'un ayant reçu 4 tonnes d'or pour en faire 6 payements égaux en 6 années successives, on demande quelle somme il pourra payer chaque année, lorsque le capital produit un intérêt composé de 10 % par an.

Alors $n = 6$, $b + x = 110$, $a = 400000$.

$$b + x = 110$$
$$\overline{b+x}^n = 1171561$$
$$b^n = 1000000$$
$$\overline{b+x}^n - b^n = 771561 \qquad 1771561\ \frac{400000}{100} \times 10.$$

On trouve $91842\frac{734638}{771561}$ fl. pour le payement annuel.

La formule donnée est utile lorsqu'on veut faire un calcul exact. Mais si le nombre d'années est grand et que l'intérêt est un nombre fractionnaire, nous opérons comme suit. Nous cherchons d'abord par les logarithmes la valeur z de la fraction $\frac{\overline{b+x}^n}{b^n}$. On la trouve en multipliant par n la différence du logarithme de $b + x$ et du logarithme de b ; en posant le nombre qui correspond à ce logarithme $= p$, on a $a\,p = \frac{a\,y}{y - x}$. On trouve par là $y = \frac{p\,x}{p - 1}$. C'est là le taux qu'on devra payer chaque année. La somme à payer annuellement est donc $\frac{p\,x}{p - 1} \times \frac{a}{b}$.

Deuxième Exemple.

Soixante tonnes d'or sont reçues pour être payées en 173 années successives (payements égaux). On veut donner un intérêt de $5\frac{19873}{33063}$ % de l'argent en question, et on demande quelle sera la somme à payer annuellement. Rép. $336334\frac{3}{8}$ florins, c.à.d. environ $5\frac{11627}{19200}$ %.

Cherchez le logarithme de 105 $\frac{19873}{33063}$; retranchez-en le logarithme de 100. Il reste 0,02366829662. Multipliez ce reste par 173 et cherchez le nombre qui correspond à ce logarithme. Vous trouvez ainsi le nombre p et à l'aide de ce nombre, sans aucune difficulté, la réponse précédente.

Mais ceux qui ne connaisent pas l'algèbre, peuvent se servir de la règle suivante, à l'aide de laquelle nous développerons encore une fois le premier Exemple.

Règle.

Cherchez la valeur comptante du capital donné au temps du dernier payement (intérêt composé). Retranchez de ce résultat la valeur actuelle du capital. Le même résultat multiplié par le taux de l'intérêt, doit alors être divisé par la différence trouvée. Le quotient représente le taux qu'on devra payer annuellement.

Quatre tonnes d'or, placées à un intérêt composé de 10 %, valent 708624 fl. 8 sous à-peu-près après 6 ans.

fl. 708624 : 8	fl. 708624 : 8
fl. 400000 : —	10
fl. 308624 : 8	fl. 7086244 : —

On trouve 22 $\frac{741268}{771561}$ %. Chaque payement est donc de 91842 $\frac{734638}{771561}$ florins, comme auparavant.

Si l'on avait reçu 10000 florins pour en faire des payements annuels égaux, y compris un intérêt de 4 %, quelle serait la somme à payer chaque année? En prenant le nombre d'années égal à 10, à 15, à 20 ou à 25, on trouvera à l'aide de la règle précédente:

Années.		
10	Payement annuel	fl. 1232 : 18 etc.
15		fl. 899 : 8 etc.
20		fl. 735 : 16 etc.
25		fl. 640 : 2 etc.

Mais si celui qui a donné l'argent veut d'abord laisser passer 7 années pendant lesquelles il ne reçoit rien, et qu'il doit recevoir le premier payement l'année suivante, quelle sera alors la somme

qui lui sera due chaque année? L'intérêt est le même que précédemment, et le nombre d'années durant lequel il reçoit le payement annuel est 10, 15, 20 ou 25.

Pour résoudre ce problème, calculez exactement, soit à l'aide de logarithmes soit par d'autres règles, la valeur comptante d'un florin au bout de 7 années, à un intérêt composé de 4 %. Multipliez le résultat par les réponses trouvées précédemment; vous obtiendrez ainsi ce qui suit.

Années.		
10	Payement annuel	fl. 1622 : 10 (un peu moins)
15		fl. 1183 : 11
20		fl. 968 : $5\frac{3}{4}$ (un peu moins)
25		fl. 842 : 7

Ce sont les nombres demandés.

Troisième Exemple.

Si l'on peut tirer durant 20 ans 2 % d'un certain capital et placer de nouveau les rentes à un intérêt composé de 5 %, quel sera le taux auquel on devrait placer le même capital (intérêt composé) pour obtenir en 20 ans, capital et intérêts, la même somme que par la première condition? On trouve aisément que c'est à $5\frac{60421}{100000}$ % environ qu'on devrait placer le capital.

Sixième Problème.

On doit payer une certaine somme en versements annuels. Etant donnée la valeur comptante de cette somme, on demande de trouver le taux de l'intérêt compris dans les versements annuels.

Premier Exemple.

Supposons que durant 20 ans on verse $9\frac{1}{3}$ % d'un certain capital qu'on a reçu. On demande de trouver le taux compris dans les versements.

En posant $9\frac{1}{3} = c$, on a d'après ce qui précède $\frac{(b+x)^n}{b^n} = \frac{c}{c-x}$.

Posant alors $b + x = v$, on a $\frac{v^n}{b^n} = \frac{c}{c - v + b}$.

On trouve par là: $v^{n+1} - (b+c)\, v^n + b^n c = 0$.

Pour trouver la valeur de v, nous nous servirons de la règle de Monsieur HALLEY. 1) Toutefois comme cet auteur ne montre pas la voie qu'il faut suivre pour trouver cette règle, mais seulement celle suivie par M. LAGNY 2) pour tirer exactement et avec peu de peine la racine cubique d'un nombre donné, nous commencerons par donner ici la règle pour l'extraction des racines et aussi celle pour la résolution des équations avec la preuve que nous en avons trouvée. Nous appliquerons ces règles aux exemples mêmes qui se trouvent à la fin de „l'Arithmétique universelle" de M. J. NEWTON. 3)

Supposons qu'on veuille tirer la racine $n^{ième}$ d'un nombre tel que $a^n + b$. Soit $a + e$ la racine, et a le plus grand nombre entier compris dans cette racine ou plutôt une valeur qui diffère fort peu de la racine elle-même, quoique cette hypothèse ne soit pas absolument nécessaire mais seulement la plus commode. Portez alors $a + e$ à la puissance n ; vous trouverez

$$a^n + \frac{n}{1} \times e\, a^{n-1} + \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} e\, e\, a^{n-2} + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \times 2 \times 3} e^3 a^{n-3} + \text{Etc.} = a^n + b$$

ou

$$b = \frac{n}{1} \times e\, a^{n-1} + \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} e\, e\, a^{n-2} + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \times 2 \times 3} e^3 a^{n-3} + \text{etc.}$$

Comme a est le plus grand nombre entier compris dans la racine, il s'ensuit que e n'est qu'une fraction. Donc en général les termes e^3, e^4, etc. sont fort petits par rapport à a. C'est pourquoi nous ne retenons que les deux premiers termes de la série écrite. Alors

$b = \frac{n}{1} \times e\, a^{n-1} + \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} e\, e\, a^{n-2}$, le tout divisé par $\frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} a^{n-2}$.

Il vient

$$e\, e = -\frac{2a}{n-1} + \frac{1 \times 2 \times b}{n \times \overline{n-1} \times a^{n-2}},$$

d'où l'on tire

$$e = -\frac{a}{n-1} + \sqrt{\frac{a\, a}{(n-1)^2} + \frac{1 \times 2 \times b}{n \times \overline{n-1} \times a^{n-2}}}.$$

1) E. HALLEY publia en 1694: »Methodus nova, accurate et fpcile invemendi radices aequationum quarumcumque generaliter, sine praevia reducticne«. (N. d. tr.)

2) TH. F. DE LACNY publia en 1692: »Méthodes nouvelles et alrégées pour l'extraction et l'approximation des racines«. (N. d. tr.)

3) L'ouvrage »Arithmetica universalis« parut en 1707. (N. d. tr.)

Ajoutez-y le nombre a, vous aurez ainsi $a + e$. La racine cherchée est donc à-peu-près égale à

$$\frac{n-2}{n-1}\,a + \sqrt{\frac{a\,a}{\overline{n-1}^{\,2}} + \frac{2\,b}{n \times \overline{n-1} \times a^{n-2}}}$$

Si a est plus grand que la vraie racine, on peut supposer que celle-ci est égale à la $n^{ième}$ racine de $a^n - b$. En posant cette racine $= a - e$, nous aurons

$$a - e = \frac{n-2}{n-1}\,a + \sqrt{\frac{a\,a}{\overline{n-1}^{\,2}} - \frac{2\,b}{n \times \overline{n-1} \times a^{n-1}}}.$$

Et comme $e\,a^{n-1}$, est beaucoup plus grand que $e\,e\,a^{n-2}$, c.à.d. $a > \frac{e}{a}$, l'expression $\frac{b}{n\,a^{n-1}}$ ne surpassera pas beaucoup la grandeur e.

Nous avons trouvé plus haut $b = \frac{n}{1}\,e\,a^{n-1} + \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2}\,e\,e\,a^{n-2}$.

En posant ce dernier terme $= 0$, on a $b = \frac{n}{1}\,e\,a^{n-1}$ ou $e = \frac{b}{n\,a^{n-1}}$. Si alors on tient compte du dernier terme en y substituant la valeur trouvée $e = \frac{b}{n\,a^{n-1}}$, on a $b = n\,e\,a^{x-1} + \frac{n-1}{2\,a}\,e\,b$.

On en tire $e = \frac{a\,b}{n\,a^n + \frac{n-1}{2}\,b}$, donc $a + e = a + \frac{a\,b}{n\,a^n + \frac{n-1}{2}\,b}$. Mais dans le cas où l'on doit calculer $a - e$, on trouve

$$a - e = a - \frac{a\,b}{n\,a^n - \frac{n-1}{2}\,b}.$$

Les formules rationnelles permettent elles-aussi de trouver une valeur approchée de la racine cherchée. La vraie racine a toujours une valeur moyenne entre celles calculées à l'aide de la formule rationnelle et de la formule irrationnelle. Cette valeur est parfois beaucoup plus près de celle donnée par la formule rationnelle que de celle donnée par la formule irrationnelle. Si l'on a l'expression $a^n + b$, on trouve à l'aide de la formule irrationnelle une racine un peu plus grande que la racine réelle, et à l'aide de la formule rationnelle une racine un peu plus petite. Le contraire a lieu lorsqu'on a l'expression $a^n - b$.

Et quoique l'extraction des racines puisse dans les cas ordinaires se faire plus facilement à l'aide de logarithmes, il est pourtant nécessaire de recourir à la méthode décrite ici, lorsqu'on veut trouver les racines avec une approximation plus grande que celle donnée par la méthode des logarithmes.

Pour mieux faire comprendre tout ceci, nous appliquerons la règle aux deux exemples suivants.

On demande en premier lieu de trouver la racine cubique de 2. En ce cas $n = 3$, $a + b = 2$; si alors $a = 1$, on a $\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$ ou 1,26. Ce sera là à-peu-près la racine cubique, car le cube de 1,26 est 2,000376. Prenez ensuite pour a la valeur trouvée 1,26; la racine cubique cherchée deviendra alors $0{,}63 + \sqrt{3{,}969 - \frac{0{,}000376}{3{,}78}}$ ou $0{,}63 + \sqrt{3{,}968005291005291}$, ce qui est égal à 1,259921049895. On voit donc, que pour trouver en 13 chiffres la racine cubique de 2, on n'a fait autre chose ici qu'une division et que l'extraction d'une racine carrée. On aurait beaucoup de peine à obtenir le même résultat par un calcul arithmétique. On peut continuer ce raisonnement aussi longtemps qu'il nous plaira. Il faut augmenter alors de $\frac{e^3}{3a}$ le nombre dont on veut extraire la racine cubique. Le résultat de cette dernière opération se réduit d'ailleurs à augmenter d'une unité le 14ième chiffre de la racine.

Cherchons en second lieu la racine cubique de 231. Le plus grand nombre cube qui y est compris est 216, dont la racine cubique est 6. Alors $a = 6$ et le reste $b = 15$, de sorte qu'on a comme première approximation, $3 + \sqrt{9 + \frac{5}{6}} = a + e$. La racine carrée de 9,8333 etc. est 3,1358, etc., de sorte que $a + e = 6{,}1358$. En posant ce dernier nombre $= a$, nous trouvons $a^3 = 231{,}00085894712$, et d'après la règle on trouve $3{,}0679 + \sqrt{9{,}41201041 - \frac{0{,}00085894712}{18{,}4074}}$, ce qui représente fort exactement la racine cubique du nombre donné. Cette racine est 6,135792439661958 97: ce nombre est correct jusqu'au 18ième chiffre. A partir du 19ième chiffre il y a une divergence. La formule irrationnelle est préférable à la formule rationnelle à cause des grands diviseurs de cette dernière formule, dont on ne peut se servir qu'avec beaucoup de peine, tandis que l'extraction de la racine carrée est bien plus simple comme l'application des formules à de nombreux exemples nous l'a fait voir.

Pour trouver la racine d'une équation, nous remarquons que

cette racine se compose de deux parties a + ou — e, dont la première a est censée comme auparavant ne différer que fort peu de la vraie valeur de la racine. Supposons que l'équation donnée soit

$$l\,z^n + k\,z^{n-1} + h\,z^{n-2} + g\,z^{n-3} + f\,z^{n-4} + d\,z^{n-5} \text{ etc.} = q,$$

et qu'on doive en tirer la vraie valeur de la racine z. Posons $z = a + e$ et agissons comme suit. Lorsque a est plus petit que la racine, on peut écrire

$$l\,z^n = a^n l + n\,a^{n-1} le + \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} a^{n-2} l e e + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} l e^3 + \text{etc.}$$

$$k\,z^{n-1} = k\,a^{n-1} + \overline{n-1} \times a^{n-2} k e + \frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \times 2} k e e a^{n-3} + \text{etc.}$$

$$h\,z^{n-2} = h\,a^{n-2} + \overline{n-2} \times a^{n-3} h e + \frac{\overline{n-2} \times \overline{n-3}}{1 \times 2} h e e a^{n-4} + \text{etc.}$$

$$g\,z^{n-3} = g\,a^{n-3} + \overline{n-3} \times a^{n-4} g e + \frac{\overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1 \times 2} g e e a^{n-5} + \text{etc.}$$

$$f\,z^{n-4} = f\,a^{n-4} + \overline{n-4} \times a^{n-5} f e + \frac{\overline{n-4} \times \overline{1-5}}{1 \times 2} f e e a^{n-6} + \text{etc.}$$

etc. = etc.

Lorsque a est plus grand que la racine, de sorte que a — e = z, il faut donner le signe — à tous les termes qui contiennent une puissance impaire de e, savoir e, e^3, e^5, e^7, etc., et le signe + à tous les autres. Ici nous avons donné le signe + à tous les termes de l'équation, mais si l'on a par exemple — $k\,z^{n-1}$ et que $a + e = z$, il faut écrire

$$- a^{n-1} k - \overline{n-1} \times a^{n-2} k e - \frac{\overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} k e e - \text{etc.},$$

en d'autres termes, tous les signes changent. Posons alors la somme de tous les nombres de la nouvelle équation qui ne contiennent pas e, donc $a^n l + a^{n-1} k + a^{n-2} h + \text{etc.} - q = b$; la somme de tous les nombres qui ne contiennent e qu'à la première puissance, = s; celle des nombres qui contiennent e e = t, qui contiennent $e^3 = u$, qui contiennent $e^4 = w$, etc. Par somme de tous les nombres nous entendons ici le résultat d'une addition, où l'on tient compte des signes + et — placés devant ces nombres. Mais comme nous avons supposé que e n'est qu'une petite partie de la racine cherchée, on peut, dans la première hypothèse, négliger tous les termes qui contiennent des puissances supérieures à e e. On a donc

$\mp b \pm s e - t e e = 0$. On doit remarquer que dans cette formule s et b ont toujours des signes opposés. Il s'ensuit que $e = \frac{\frac{1}{2} s - \sqrt{\frac{1}{4} s s - b t}}{t}$, lorsque b et t ont le même signe, mais que $e = \frac{\frac{1}{2} s + \sqrt{\frac{1}{4} s s + b t}}{t}$, lorsque leurs signes sont différents.

Pour mieux faire comprendre tout ceci, nous prendrons quelques exemples.

Soit $z^4 - 3 z z + 75 z = 10000$. Alors $n = 4$, $l = 1$, $k = 0$, $b = 3$, $g = 75$ et $q = 10000$. Posons $a = 10$.

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad & l z^n = + a^4 \;..\; 4 a^3 e + 6 a a e e \;..\; 4 a e^3 + e^4 \\ & - h z^{n-2} = - h a a \;..\; 2 h a e - h e e \\ & + g z^{n-3} = + g a \;..\; g e. \end{aligned}$$

Comme nous ne savons pas encore si a est plus grand ou plus petit que la vraie valeur de la racine, donc s'il faut donner à e le signe + ou le signe −, nous examinons si l'expression $+ a^4 - h a a + g a - q$ est positive ou négative. En remplaçant toutes les lettres par leurs valeurs, on voit que b a le signe +. La somme de tous les termes qui contiennent e doit donc avoir le signe —, et comme l'expression $4 a^3 + g$ est plus grande que $2 a h$ (ces deux doivent avoir dans le cas considéré des signes opposés), il faut prendre $- 4 a^3$. Il s'ensuit que $z = a - e$ et qu'il faut prendre $- e$, $- e^3$, $- e^5$, etc. lorsque ces puissances correspondent à des termes positifs, mais le signe opposé lorsqu'elles correspondent à des termes négatifs. On trouvera donc

$$\begin{aligned} & \qquad\qquad\quad b \qquad\quad s \qquad\quad t \qquad\quad u \\ & + l z^n = + 10000 - 4000 e + 600 e e - 40 e^3 + e^4 \\ & - h z^{n-1} = - 300 + 60 e - 3 e e \\ & + g z^{n-3} = + 750 - 75 e \\ & - q = - 10000 \\ \hline & 0 = + 450 - 4015 e + 597 e e - 40 e^3 + e^4. \end{aligned}$$

Alors $450 = b$, $4015 = s$, $597 = t$. En négligeant les termes qui contiennent e^3 et e^4 à cause de leur petitesse, on a $597 e e - 4015 e + 450 = 0$. La racine e de cette équation est $\frac{\frac{1}{2} s - \sqrt{\frac{1}{4} s s - b t}}{t}$; dans le cas considéré on a donc $e = \frac{2007\frac{1}{2} - \sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597}$, de sorte

que la valeur cherchée de la racine est à-peu-près 9,886. Mais en prenant, dans la deuxième hypothèse, cette valeur-là, on trouvera à peu de chose près $z = a + e = 9,8862603936495$. On peut même s'approcher encore davantage de la vraie valeur, vu que l'équation est $o = - b + s e + t e e + u e^3 + e^4$ ou $t e e = b - s e - u e^3 - e^4$.

Il s'ensuit $e = \frac{-\frac{1}{2} s + \sqrt{\frac{1}{4} s s + b t - u e^3 - e^4}}{t}$, où l'on peut prendre pour e sous le signe $\sqrt{}$ la valeur connue, attendu qu'elle diffère peu de celle qu'on cherche. Pour voir maintenant quelle est la différence en moins de la nouvelle valeur de e par rapport à l'ancienne valeur, prenez le double de $\sqrt{\frac{1}{4} s s + b t}$ et divisez $u e^3 + e^4$ par cette expression. Vous obtiendrez ainsi le nombre demandé. Il est aisé de comprendre pourquoi il en est ainsi. Il suffit de considérer l'expression $a a$: si l'on doit en extraire la racine carrée, on obtient a. Supposons que de $a a$ on retranche $2 a b$ et qu'on doive extraire la racine carrée de la différence, b étant fort petit par rapport à a. En divisant $2 a b$ par le double de a, on trouve b. C'est là, peut on dire, la différence en moins de la nouvelle valeur de la racine par rapport à l'ancienne. Elle sera donc $a - b$, dont le carré est $a a - 2 a b + b b$, ce qui ne diffère de $a a - 2 a b$ que par la terme $b b$ qui est négligeable; car lorsque b est une fort petite fraction, $b b$ est moindre encore. Mais dans le cas où l'on a $a - e$, il faut encore ajouter $\frac{\frac{1}{2} u e^3 - \frac{1}{2} e^4}{\sqrt{\frac{1}{4} s s - t b}}$ à la racine trouvée précédemment.

Soit l'équation $z^3 - 17 z z + 54 z = 350$. Pour trouver la valeur de z, posons $a = 10$; on a de plus $l = 1$, $k = 17$, $h = 54$, $n = 3$, $350 = q$,

$$+ l z^n = a^3 + 3 a a e + 3 a e e + e^3$$
$$- k z^{n-1} = - k a a - 2 k a e - k e e$$
$$+ h z^{n-2} = h a + h e,$$

on bien, en remplaçant les lettres par des nombres,

$$\begin{array}{llll} & b & s & t \\ + 1000 & + 300\, e & + 30\, e e & + e^3 \\ - 1700 & - 340\, e & - 17\, e e & \\ + 540 & + 54\, e & & \\ - 350 & & & \\ - 510 & + 14\, e & + 13\, e e & + e^3 = o. \end{array}$$

Comme on a — 510, ou voit que e doit avoir le signe +. Nous avons donc 510 = 14 e + 13 e e, partant $e = \frac{-7 + \sqrt{6679}}{13}$ ou z = 15,7. Ce nombre est trop grand. C'est pourquoi nous prenons a = 15, et en conduisant les opérations comme plus haut, nous trouvons $e = \frac{109\frac{1}{2} - \sqrt{11710\frac{1}{4}}}{28}$, et par conséquent z = 14,954068. Si l'on corrige la valeur de cette racine une troisième fois, on peut trouver une valeur qui s'accorde avec la vraie valeur jusqu'au 25ième chiffre; et si l'on ne veut pas encore se contenter de cette valeur, on peut retrancher de la racine déjà trouvée (ou y ajouter) l'expression $\frac{\frac{1}{2}e^3}{\sqrt{\frac{1}{4}ss \mp tb}}$. On trouvera ainsi une valeur plus approchée encore.

Supposons qu'on ait $z^4 - 80z^3 + 1998zz - 14937z + 5000 = 0$. Cette équation a plusieurs racines réelles. La solution est plus difficile que d'ordinaire, parce que les coëfficients de z z et de z sont très-grands en comparaison avec les nombres ordinaires. Divisez cette équation par une progression géométrique 1, 10, 100, etc.; vous trouverez à-peu-près $-z^4 + 8z^3 - 20zz + 15z = 0{,}5$. Alors z est 10 fois plus petit qu'auparavant. Soit a = 1 dans la première hypothèse; alors $+2 - 5e + 2ee + 4e^3 - e^4 = 0{,}5$, c.à.d. $1\frac{1}{2} = 5e + 2ee$. Il s'ensuit $e = \frac{-5 + \sqrt{37}}{4}$, de sorte que z = 1,27.

Il est certain que 1,27 diffère peu de la vraie valeur de la racine. En prenant alors ce dernier nombre pour a, on obtient

b	s	t	u	
— 26014,4641	— 8193,532 e	— 967,7 e e	— 50,8 e^3	— e^4
+ 163870,6400	+ 38709,600 e	+ 3048,0 e e	+ 80,0 e^3	
— 322257,4200	— 5074,200 e	— 1998,0 e e		
+ 189699,9000	+ 14937,000 e			
— 5000,0000				
+ 298,6559	— 5296,132 e	+ 82,26 e e	+ 29,2 e^3	— e^4 = 0.

Alors on a

$$-298{,}6559 = -5296{,}132\,e + 82{,}26\,ee,$$

équation dont la racine est égale à $\frac{2648{,}066 - \sqrt{698768{,}106022}}{82{,}26}$ ou à 0,05644080331. Ce nombre est plus petit que la vraie valeur de e.

Pour le corriger, remplacez dans l'expression $\frac{\frac{1}{2} u e^3 - \frac{1}{2} e^4}{\sqrt{\frac{1}{4} s s - b t}}$ les lettres par des nombres; vous trouverez alors $\frac{0,0026201}{2648,423}$ ou 0,0000009117. La valeur corrigée de e sera donc 0,05644179448; et si l'on veut obtenir dans la racine un nombre de chiffres plus grand encore, substituez la valeur corrigée de e dans l'expression $t u e^3 - t e^4$ qui devient 0,43105602423. En substituant ce nombre dans $e = \frac{\frac{1}{2} s - \sqrt{\frac{1}{4} s s - b t - t u e^3 + t e^4}}{t}$, on trouvera pour e la valeur $\frac{2648,066 - \sqrt{6987685,67496597577}}{82,26}$ ou 0,56441794480744o2. Il s'ensuit que $a + e$ ou z est égal à 12,75644179448074402. On voit aisément jusqu'où ces nombres donnent la vraie valeur de la racine.

Et si vous voulez faire la même chose à l'aide d'une formule rationnelle, substituez $\frac{b}{s} = e$ dans le dernier terme de l'équation $\pm b \mp s e = t e e$, ce qui donne $\pm b \mp s e = \frac{t e b}{s}$ ou $\pm s b = t e b \pm s s e$ ou $e = \frac{+ s b}{t b \pm s s} = \frac{s b}{s s \pm t b}$. Après avoir écrit les équations qui résultent de $a \pm e = z$, on voit d'abord si a est plus grand ou plus petit que la racine donnée, parce que son signe doit être contraire à celui de b. Lorsque b et t ont les mêmes signes, il faut prendre $s s - t b$; mais lorsque leurs signes sont contraires, $s s + t b$. En pratique il est plus commode d'appliquer le théorème comme suit :

$$e = \frac{b}{s + \frac{t b}{s}},$$

parce que alors on n'a à faire qu'une multiplication et deux divisions, contre 3 multiplications et 1 division dans le cas précédent. Nous appliquerons cette méthode à l'exemple précédent. Nous y avons trouvé

$$298,6559 - 5296,132\, e + 82,26\, e e = 0.$$

Alors $b = 298,6559$ $s = 5296,132$ et $t = 82,26$. On trouvera $s - \frac{t b}{s} = 5291,49325$. En divisant b par ce nombre, on aura $e = 0,056441$; et en ajoutant cela à $a = 12,7$, on aura $z = 12,756441$. Cette opération nous a fait trouver 5 nouvelles chiffres de la racine. Si l'on désire trouver une valeur plus approchée encore, il faut recommencer le calcul.

Mais revenons au fait et cherchons la racine de l'équation $v^{n-1} - \overline{b+c} \times v^n + b^a c = 0$. A cet effet divisons-la par une progression géométrique 1, b b, etc. Comme l'équation a n + 1 termes, il est certain que le dernier terme doit alors être divisé par b^{n+1}. On trouvera le résultat suivant $v^{n+1} - \frac{b+c}{b} \times v^n + \frac{c}{b} = 0$. Dans cette équation la racine est b fois plus petite qu'auparavant; on a de plus $n = 20$, $b = 100$ et $c = 9\frac{1}{3}$. En remplaçant alors les lettres par des nombres, on obtient l'équation suivante $v^{21} - 1{,}09\frac{1}{3} v^{20} + 0{,}09\frac{1}{3} = 0$. Comme nous avons écrit $b + x$ ou v pour le somme d'un capital de 100 florins et de l'intérêt annuel, et que cet intérêt est en général de 5 % environ, nous pouvons prendre $v = 105$. Mais parce que v a été réduit à la centième partie, nous avons pris $a = 1{,}05$ dans la première hypothèse, et par conséquent $z = 1{,}07$ à-peu-près. En prenant ce nombre dans la deuxième hypothèse, nous aurons, vu que ce nombre est trop grand, $z = a - e$. De plus $k = 1{,}09\frac{1}{3}$ et $q = 0{,}09\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} +1\, z^n = a^{21} - 20\, a^{20}\, e + 210\, a^{19}\, e\, e - \text{etc.} \\ -k\, z^{n-1} = -k\, a^{20} - 20\, k\, a^{19}\, e - 190\, k\, a^{18}\, e\, e + \text{etc.} \\ +q = +a^{20}\, r \end{array}\right\} = 0.$$

Nous avons posé $q = a^{20} r$ pour ne pas multiplier le nombre a par lui-même un si grand nombre de fois: de cette manière on trouve occasion de diviser tous les termes par a^{19}.

Après avoir fait cette division, on obtient

$$\overline{a - k + r} \times a \begin{array}{c} -21\, a \\ \\ +20\, k \end{array} e \begin{array}{c} +210 \\ \\ -190\frac{k}{a} \end{array} e\, e = 0.$$

Pour trouver la valeur de r qui est égale à $\frac{q}{a^{20}}$, cherchez le logarithme de a ou de 1,07 qui est 0,02938777769 et multipliez-le par 20, ce qui donne 0,58767555538. Le nombre qui correspond avec ce logarithme est à-peu-près $3{,}86968\frac{1}{2} = a^{20}$. Divisez q ou $0{,}09\frac{1}{3}$ par ce nombre. Le quotient sera $r = 0{,}0241191$. Alors $a - k + r = 0{,}0007857\frac{2}{3}$; et, en multipliant par a, on trouve $\overline{a - k + r} \times a = 0{,}000840770\frac{1}{3}$. En remplaçant également les

autres lettres qui se trouvent dans l'équation précédente par des nombres, on aura $0,000840770\frac{1}{3} - 0,60\frac{1}{3}e + 15\frac{257}{321}ee = 0$, et en rendant tous les termes entiers, $0,269887277 - 193,67\,e + 5090\,ee = 0$.

On en tire $e = \frac{96835 - \sqrt{8003,29098507}}{5090}$, c.à.d. $e = 0,0014487$. En soustrayant ce nombre de $a = 1,07$ et en multipliant le reste par 100, parce que le v qu'on trouve est 100 fois plus petit que le vrai v, on obtient v, ou $b + x, = 106,85513$. En soustrayant $b = 100$ de ce nombre, on trouve le reste $x = 6,85513$. Si l'on cherche, d'après la solution du premier Problème, deux fort petites fractions l'une plus grande l'autre plus petite que x, on trouvera $\frac{6}{7}$ pour la première et $\frac{5}{6}$ pour la seconde. En posant $a = 6\frac{6}{7}$, on trouvera $x = 6,85521$ pour l'intérêt cherché, ce qui représente une beaucoup meilleure approximation. Et si l'on avait pris $\frac{65}{76}$ ou $\frac{59}{69}$ au lieu de $\frac{6}{7}$, on aurait trouvé une valeur plus approchée encore, et le travail n'aurait pas été beaucoup plus grand.

Nous résoudrons maintenant le même problème à l'aide des tables de l'intérêt et encore d'une autre manière.

En 20 ans	Comptant	En 20 ans	Comptant
11200000	6000000	200000000	107142857

Cherchez alors dans les tables de l'intérêt ce qui se rapporte à la 20^{ieme} année, et prenez les deux nombres qui s'approchent le plus du nombre trouvé, l'un étant plus grand l'autre plus petit que ce dernier. Vous trouverez

108030215	à	$6\frac{3}{4}$ %	107142857	
105940142	à	7 %	105940142	$\frac{1202715}{8360292}$
2090073	à	$\frac{1}{4}$ %	1202715	

En retranchant cette fraction de 7 %, on trouve le reste $6\frac{7157577}{8360292}$. Pour simplifier cette fraction, divisez par 836, il viendra $\frac{8561}{10000}$, ce qui est le résultat demandé.

Autrement.

Supposons que l'intérêt soit de 7 %. Le logarithme de 4 est 6020600. Divisez ce nombre par le logarithme de $\frac{107}{100}$, c.à.d. par 293838. Il viendra $20\frac{49}{100}$ années. Si nous avions trouvé précisément 20 années, l'intérêt aurait été de 7 %; mais comme nous avons trouvé un plus grand nombre, il s'ensuit que l'intérêt est moindre. Nous prenons en second lieu un intérêt de $6\frac{5}{6}$ %. Le logarithme de 56 est

$$9\frac{1}{3} \quad 7 \quad 2\frac{1}{3}$$

$$9\frac{1}{3} \quad \frac{28}{3} \times \frac{7}{3} \left\{ 4 \right.$$

et celui de 15

$$9\frac{1}{3} \quad 6\frac{5}{6} \quad 2\frac{1}{2} \qquad \frac{28}{3} \quad \frac{5}{2} \left\{ \begin{matrix} 56 \\ 15 \end{matrix} \right.$$

	17481880
	11760912
	5720967 B

$106\frac{5}{6}$

641 Le logarithme est 28068580
600 27781512
A 287068

Divisez B par A. Il viendra $19\frac{93}{100}$ années. C'est pourquoi l'intérêt a été plus grand que $5\frac{5}{6}$. Mais pour calculer à-peu-près la différence, agissez comme suit

$$20\frac{49}{100} \;.....\; 7 \qquad 19\frac{93}{100} \;.....\; 6\frac{5}{6} \qquad \frac{56}{100} \quad \frac{1}{6}$$

$$20 \quad 6\frac{5}{6} \qquad 19\frac{93}{100} \quad \frac{1}{48} \qquad \frac{7}{100} \left\{ \frac{1}{48} \right. \quad 6\frac{41}{48}$$

Nous nous servirons maintenant de ce dernier nombre.

$$9\frac{1}{3} \quad 6\frac{41}{48} \quad 2\frac{23}{48} \qquad \frac{28}{3} \quad \frac{119}{48} \left\{ \begin{matrix} 64 \\ 17 \end{matrix} \right.$$

$106\frac{41}{48}$

5129 37100327
4800 36812412
287915 D
64 18061800
17 12304489
5757311 C

Divisez ce nombre par B; vous trouverez $19\frac{996565}{1000000}$ $^{0}/_{0}$. On voit par là que l'intérêt est plus grand que $6\frac{41}{48}$, mais la différence peut être petite. Cherchez alors d'après la solution du premier Problème une fraction un peu plus grande que $6\frac{41}{48}$ qui, lorsqu'on fait une multiplication en croix, ne donne qu'une différence de 1. Vous trouverez $\frac{6}{7}$. En opérant avec $6\frac{6}{7}$ comme précédemment vous trouverez $20\frac{6304}{1000000}$ années.

$$\begin{array}{llll}
20\frac{6304}{1000000} & 6\frac{6}{7} & & \\
19\frac{996565}{1000000} & 6\frac{41}{48} & & \\
\frac{9739}{1000000} \quad — & \frac{1}{336} \quad — & \frac{6304}{1000000} & \left\{\begin{array}{l} 6\frac{6}{7} \\ \frac{134}{70000} \\ 6\frac{59866}{70000} \text{ ou un peu plus de } 6\frac{8552}{10000} \end{array}\right.
\end{array}$$

Deuxième Exemple.

D'après cette méthode il est fort aisé de calculer l'intérêt des loteries qu'on a organisées récemment en Hollande. A cet effet nous prendrons pour exemple le projet de la loterie de la République de 6 millions, divisée en 25 classes et dont les premiers versements ont dû avoir lieu le 8 Août 1712. Pour faire par ordre les calculs relatifs à cette loterie d'après le projet imprimé, commencez par écrire la somme des non-valeurs et retranchez-en ensuite les non-valeurs qui sortent chaque année, ce qui donne zéro à la fin si l'on n'a commis aucune erreur. Multipliez d'abord toutes les non-valeurs et ensuite les restes par 8; en ajoutant ces sommes on obtient fl. 2883200, ce qui est l'intérêt payé pour les non-valeurs.

Retranchez alors l'argent payé pour les non-valeurs de la somme totale payée pour chaque classe et retranchez cette différence de la somme de tous les prix. Si alors vous trouvez également zéro, vous n'avez commis aucune erreur dans les soustractions. Mais pour plus de brièveté vous pouvez omettre les 2 derniers chiffres des prix. Multipliez alors par 2 la somme de tous les prix, et les restes. En ajoutant ces produits, vous trouverez pour l'intérêt des

prix fl. 1160464. Ajoutez-y ensuite fl. 8886000, la somme de la loterie, et le nombre trouvé plus haut. Vous trouverez ainsi que la somme totale payée en 25 ans est de fl. 12929664.

Pour bien organiser ces espèces de loteries il faut faire en sorte que les sommes payées chaque année soient égales autant que possible; c'est ce que l'algèbre permet de faire aisément. Mais cette égalité n'a pas été observée, ni dans cette loterie-ci, ni dans toutes les autres. Car dans la loterie de l'année 1711, la différence entre le dernier et l'avant-dernier payement est supérieur à 76000 florins, ce qui nous fait supposer qu'on n'a fait que des calculs sommaires tout au plus.

Dans la loterie considérée ici chaque payement est en moyenne de 516780 florins environ, ce qui fait fl. 12919500 pour 25 payements. Reste alors encore un surplus de 10164 florins qui sont payés la dernière année. En réduisant cette somme au comptant à l'aide de la table des intérêts (l'intérêt étant de 7 %) on trouvera à-peu-près $1872 \frac{3}{4}$ florins. Cet argent comptant est divisé en payements annuels. Comme 1165 florins au comptant donnent 100 florins à payer annuellement, $1872 \frac{3}{4}$ florins en donneront à-peu-près 160. En ajoutant ce nombre à 516780 on trouvera 516940. Dites alors

$$6000000 \text{ — fl. } 516940 \text{ — } 100 \left.\vphantom{\frac{1}{1}}\right\} 2 \frac{1847}{3000}.$$

On paye $2 \frac{1847}{3000}$ % environ. — Nous aurions pu faire un calcul beaucoup plus exact, mais nous estimons que la différence est trop faible pour que nous prenions cette peine.

En prenant d'abord 7 %, on trouve $24 \frac{98473}{146919}$ années. On voit par là que le taux de l'intérêt est plus élevé que 7 %. Nous avons pris ensuite $7 \frac{1}{16}$ %, et nous avons trouvé ainsi $25 \frac{106}{1000}$ années. Comme ce nombre était trop grand, j'ai pris $7 \frac{1}{30}$ % et j'ai trouvé ainsi $24 \frac{932}{1000}$ années. On voit par là que le taux de l'intérêt est entre les deux nombres trouvés.

$$25\frac{106}{1000} \quad 7\frac{1}{16} \quad 25$$

$$24\frac{932}{1000} \quad 7\frac{1}{30} \quad 24\frac{932}{1000} \quad 7\frac{1}{30}\,\%$$

$$\frac{174}{1000} \quad \frac{7}{240} \quad \frac{68}{1000} \left\{ \frac{34}{3000} \right.$$

$7\frac{67}{1500}\,\%$, ce que ne diffère que fort peu de la vraie valeur.

Nous avons fait de la même manière les calculs suivants.

Intérêt des 5 projets suivants:

1. La loterie hollandaise de 6 millions, An 1711, $6\frac{179}{300}\,\%$ ou fl. 6, 11 sous, $14\frac{14}{15}$ deniers.
2. La loterie hollandaise de 12 millions, le premier Mars 1712, un peu moins que le N°. 5.
3. La loterie de la république de 6 millions, le 8 Août 1712, $7\frac{67}{1500}\,\%$ ou fl. 7,0 sous, $14\frac{22}{75}$ deniers.
4. La loterie de la république de $3\frac{1}{2}$ millions, le 2 Août 1712, $6\frac{767}{1500}\,\%$ ou fl. $6:12:4\frac{44}{125}$ d.
5. La loterie hollandaise de 12 millions, le 13 Mars 1713, $6\frac{3}{10}\,\%$ ou un peu moins de fl. 6:6.

Si l'on veut savoir à quels payements annuels durant 20 années ces loteries sont équivalentes, on trouve par la solution du cinquième Problème:

1. Celle-ci équivaut à un payement de $9\frac{1455}{10000}\,\%$ à-peu-près, durant 20 ans.
2. Celle-ci équivaut au même payement que la 5ième à $\frac{1}{500}\,\%$ près; nous n'avons toutefois fait qu'un calcul sommaire parce que le cas de la 5ième loterie est à-peu-près identique avec celui-ci.
3. Celle-ci équivaut à un payement annuel de $9\frac{4722}{10000}\,\%$ durant 20 ans.
4. Celle-ci à un payement annuel de $9\frac{1577}{10000}\,\%$ durant 20 ans.

5. Celle-ci est équivalente à un payement annuel de $8\frac{9320}{10000}$ % durant 20 ans.

Pour faire voir la différence, les fractions sont toutes réduites au dénominateur 10000.

Septième Problème.

Supposons qu'une certaine somme nous soit due au bout d'un nombre donné d'années et que nous recevions annuellement un certain intérêt jusqu'au moment où l'on nous paye la somme entière. On demande la valeur comptante de cette somme, l'intérêt étant connu.

Premier Exemple.

Supposons que nous ayons tiré 100000 florins de la loterie de 1711, qu'on doive nous les payer en 1726 et que nous recevions de plus une rente de 2 %. On demande la valeur comptante de cette somme, l'intérêt annuel étant de 5 %.

Si l'on considère les rentes qu'on nous paye comme une somme d'argent que nous recevons en payements annuels, on peut réduire ces rentes en argent comptant à l'aide des tables de l'intérêt. En y ajoutant alors la valeur comptante de la somme elle-même, on a le résultat demandé.

On peut également faire le calcul à l'aide des tables de logarithmes. Cela n'a aucune difficulté. Toutefois nous ferons usage d'une méthode qui n'exige pas l'emploi des tables de logarithmes.

15	14	13	12	11	10	9	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	7	$4\frac{1}{3}$	3	$2\frac{1}{5}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{2}{7}$	$1\frac{7}{9}$	
75	35	$21\frac{2}{3}$	15	11	$8\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{7}$	5	$3\frac{8}{9}$

1
75
2625
56875
853125
93843·75
7820 31
502·73
25 13
97
207892818

On trouve ensuite à l'aide de la progression géomètrique écrite ci-dessous la valeur totale au bout de 15 ans.

207892818
1
107892818 (20)
2157856360 (2000)
43157 | 12720000
100000

fl. 143157 : 2 : 8 au bout de 15 ans.

Au bout de 15 ans	Comptant	Au bout de 15 ans	Comptant
207892818	— 100000000 —	$143157\frac{1}{8}$	fl. 68851 : 0 : 8

C'est là le résultat demandé.

Cette règle de trois que nous avons appliquée à la fin du calcul et qui nous a servi à trouver la valeur comptante de la somme donnée au bout de 15 ans peut être remplacée par le calcul suivant qui ici est un peu plus long, mais dont on peut se servir avec avantage lorsque le nombre d'années est grand.

$$21 \quad \frac{15}{5}\;\frac{7}{1}\;\frac{4\frac{1}{3}}{13}\;\frac{3}{1}\;\frac{2\frac{1}{5}}{11}\;\frac{1\frac{2}{3}}{5}\;\frac{1\frac{2}{7}}{3}\;\frac{1}{1}\;\frac{\frac{7}{9}}{1}$$

$$\frac{5}{7}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{13}{63}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{11}{105}\quad\frac{5}{63}\quad\frac{3}{49}\quad\frac{1}{21}\quad\frac{1}{27}$$

Multipliez $\frac{5}{7}$ par fl. 143157 : 2 : 8, ce produit par $\frac{1}{3}$, le nouveau produit par $\frac{13}{63}$ et ainsi de suite par toutes les fractions, jusqu'à ce que le produit devient négligeable. Ajoutez ensemble les résultats de toutes les multiplications de rang impair, donc ceux de la première, de la troisième, de la cinquième, de la septième, etc. retranchez-en la somme des produits de la deuxième, de la quatrième, de la sixième et de la huitième, etc.; le reste est ce qui doit être retranché de la somme pour nous faire obtenir la valeur comptante. Voici la série des opérations:

fl. 143157 : 2 : 8 (5)
7 | 715785 : 12 : 8
102255 : 1 : $12\frac{1}{2}$
3 | 34085 : 0 : $9\frac{1}{2}$

34085 : 0 : $9\frac{1}{2}$ (13)
63 | 541 : 0 : $10\frac{4}{13}$ (11)
7033 : 8 : 0
7 | 1004 : 15 : 8 (11)
11052 : 10 : 8
105 | 105 : 5 : 4

105 : 5 : 4 (5)
63 | 526 : 6 : 4
8 : 7 : $1\frac{1}{4}$ (3)
25 : 1 : 4
49 | — : 10 : $3\frac{3}{4}$
21 | — : — : $7\frac{3}{4}$
27 | $\frac{1}{4}$

fl.	102255 :	1 :	$12\frac{1}{2}$
fl.	7033 :	8 :	6
fl.	105 :	5 :	4
fl.		10 :	$3\frac{3}{4}$
fl.			$\frac{1}{4}$
fl.	109394 :	5 :	$10\frac{1}{2}$
fl.	35098 :	3 :	$10\frac{1}{2}$
fl.	74296 :	2 :	—
fl.	143157 :	2 :	8
fl.	68861 :	0 :	8 comme précédemment.

fl.	34085 :	0 :	$9\frac{1}{2}$
fl.	1004 :	15 :	8
fl.	8 :	7 :	$1\frac{1}{4}$
fl.	— :	— :	$7\frac{3}{4}$
fl.	35098 :	3 :	$10\frac{1}{2}$

Huitième Problème.

De la Combinaison et de la Division des Lots dans les Loteries dont nous avons parlé.

Premier Exemple.

Supposons que quelqu'un ait tiré 100000 florins de la loterie de 1711, à recevoir après 15 ans, et 20000 florins, à recevoir après 30 ans, et qu'on veuille combiner les deux prix en un seul de 120000 florins. On demande après combien d'années il devra recevoir ce prix (les rentes annuelles de 2400 florins qui lui sont dues, étant payées à la même époque), si l'intérêt annuel est de 5 %, et qu'on prend l'intérêt composé comme dans tous les problèmes précédents.

Nous calculerons le résultat sans aucun tâtonnement à l'aide des tables de l'intérêt. D'après la solution du Problème précédent la valeur comptante des deux prix est de fl. $79637\frac{89}{100}$. Posons ce nombre = b. Soit 100000000, le nombre qui a été choisi pour calculer les tables, = a. 5 % veut dire 1 fl. sur 20 fl. Soit 20 = c. Soit 2400, le nombre de florins qu'on reçoit comme rente annuelle, = d. 2 % veut dire 1 sur 50. Soit 50 = e. Alors la somme des prix est e d. Soit x le nombre qui correspond dans la table de l'intérêt avec le nombre d'années que nous devons chercher.

$$x$$
$$a$$
$$\frac{x - a}{\qquad c}$$
$$\frac{c\,x - c\,a}{\qquad d}$$
$$a\,\overline{d\,c\,x - d\,c\,a}$$

$$\frac{d\,c\,x - d\,c\,a}{a}$$ à cause de l'intérêt.

A l'époque	Comptant	$e\,d$
x ———	a	$\frac{d\,c\,x - d\,c\,a}{a} + e\,d \Big\} \; dc - \frac{d\,c\,a}{x} + \frac{e\,d\,a}{x}$

$$d\,c - \frac{d\,c\,a}{x} + \frac{e\,d\,a}{x} = b$$

$$b\,x - d\,c\,x = e\,d\,a - d\,c\,a$$

$$x = \frac{e - c}{b - d\,c} \times a\,d.$$

En remplaçant alors les lettres par des nombres, on trouve $x = 227577628$. Et en cherchant ce nombre dans les tables de l'intérêt, on trouve ce qui suit

17 Ans	229201832			227577628
16 Ans	218287459		Jours	218287459
	10914373	— 365 ——		9290169 } $310 \frac{2}{3}$ Jours.

Le prix doit donc être payé après 16 ans et $310 \frac{2}{3}$ jours. En se servant de logarithmes on trouve 311 jours à-peu-près ; mais la première valeur est plus exacte. Et en prenant un intérêt de 6 %, on trouvera environ 16 ans et 273 jours.

Deuxième Exemple.

Quelqu'un a pris 40 lots dans la loterie hollandaise de 12 millions de florins (dont les prix de la première classe ont été payés le premier Mars de l'année 1713). Le résultat du tirage est donné ci-dessous. On désire combiner ces lots de manière à en former une classe unique, la rente étant payée à partir de l'époque où l'on trouvera que le tirage de cette classe doit avoir lieu. Si l'on trouve une partie d'une année, on recevra la partie correspondante de la rente. A l'époque trouvée on reçoit tous les prix qu'on a tirés.

Classe	Prix	Florins	Prix à recevoir plus tard		Valeur comptante (5 %)		Par an
1	1	210	210	fl.	207 : 12 : 6	fl.	8
2	2	210	420	»	410 : 14 : —	»	16
6	1	220	220	»	204 : 15 : 7	»	8
8	2	220	440	»	401 : 4 : 6	»	16
—	1	500	500	»	403 : 1 : —	»	10
11	1	233	233	»	202 : 13 : 9	»	8
13	3	233	699	»	596 : 2 : 12	»	24
14	1	233	233	»	196 : 17 : 6	»	8
16	1	2000	2000	»	1349 : 14 : 10	»	40
—	1	250	250	»	201 : 4 : 9	»	8
18	1	500	500	»	324 : 13 : 2	»	10
—	1	250	250	»	197 : 7 : 14	»	8
22	1	1000	1000	»	605 : 2 : 3	»	20
—	4	270	1080	»	790 : 8 : 4	»	32
26	1	20000	20000	»	11374 : 17 : 12	»	400
—	7	290	2030	»	1375 : 18 : 5	»	56
27	3	290	870	»	584 : 9 : 2	»	24
28	3	290	870	»	579 : 9 : 9	»	24
29	2	290	580	»	383 : 3 : 4	»	16
30	3	290	870	»	570 : 4 : 11	»	24
	40 lots		fl. 33255	fl.	20959 : 14 : 3	fl.	760 par an

Par l'arithmétique.

760	100 } 20	fl. 20959 : 14 : 3
A 15200	5 }	» 15200 : — : —
33255		fl. 5759 : 14 : 3
fl. 18055		20
D 5777600 deniers		115194 sous
		C 1843104 deniers.

Ajoutez huit zéros au nombre C et divisez le résultat par D. Vous trouverez ainsi $313470677\frac{1}{2}$. Cherchez ce nombre dans la table de l'intérêt (5 %), vous trouverez

24 Ans	322509994		$313470677\frac{1}{2}$
23 Ans	307152376	Jours	307152376
	15357618 —	365 —	$6318300\frac{1}{2}$

Il vient : $150\frac{1}{6}$ jours à-peu-près.

Le résultat demandé est donc: 23 ans et $150\frac{1}{6}$ jours. Si l'on avait pris un intérêt de 6 %, on aurait trouvé 23 ans moins $\frac{3}{4}$ jour à-peu-près. Et si dans ce dernier cas on avait pris la moyenne des temps, comme quelques personnes le font, on aurait trouvé que l'époque où les prix doivent être payés, tombe environ 206 jours plus tard.

Troisième Exemple.

Supposons que quelqu'un ait tiré 100000 florins, à recevoir après 15 ans comme précédemment, et qu'on veuille diviser ce prix en deux autres, dont le premier doit être payé au bout de 6 ans et le second au bout de 30 ans.

On demande de combien de florins chaque prix doit être, l'intérêt annuel étant de 5 % tant pour le prix unique que pour les deux prix. Dans les problèmes suivants on reçoit annuellement un intérêt de 2 %.

Nous avons trouvé plus haut qu'une tonne d'or à recevoir après 15 ans vaut au comptant avec les rentes et les intérêts de ces rentes fl. 68861 : 0 : 8. Calculez ensuite la valeur comptante d'une tonne d'or à recevoir après 30 ans avec les rentes et leurs intérêts. On trouvera fl. 53882 : 12 : 15. Calculez aussi la valeur d'une tonne d'or à recevoir après 6 ans (avec les intérêts). Vous trouverez fl. 84772 : 18 : 7. (On peut trouver aussi ces nombres dans les listes imprimées, dans lesquelles les prix ont été réduits en argent comptant). On trouve alors le résultat demandé à l'aide de l'application suivante de la règle de trois:

fl. 84772 : 18 : 7   Capital   fl. 68861 : 0 : 8
fl. 53882 : 12 : 15   fl. 53882 : 12 : 15
fl. 30890 : 5 : 8 — 1000000 — fl. 14978 : 7 : 9
un peu plus de fl. 48488 : 19 : 8, à recevoir après 6 ans
fl. 100000 : — : —
fl. 51511 : 0 : 8 à-peu-près, à recevoir après 30 ans.

Nous ne développerons pas les 4 problèmes qui suivent, parce que leur solution est absolument évidente d'après ce qui précède, et qu'ils peuvent être résolus fort aisément par un calcul arithmétique élémentaire, le premier d'après le 2ième Exemple et les 3 derniers d'après le 3ième Exemple de ce Problème.

Quatrième Exemple.

Supposons qu'on ait tiré un prix de 10000 florins, à recevoir après 15 ans, et qu'on veuille diviser ce prix en deux autres, dont le premier doit être de 40000 fl. à recevoir après 6 ans et le second de 60000 fl. On demande à quelle époque ce dernier devra être payé, l'intérêt étant de 5 % par an. Réponse: après 24 ans et 140 $\frac{3}{8}$ jours à-peu-près.

Cinquième Exemple.

Supposons qu'on ait tiré 100000 fl. à recevoir après 15 ans et qu'on veuille diviser ce prix en 6 autres, dont les 5 premiers doivent être égaux entre eux et doivent être reçus après 6, 9, 14, 17 et 24 ans respectivement, tandis que le sixième doit être reçu au bout de trente ans. On demande quel doit être le montant de chaque prix. Réponse: les 5 premiers doivent être de fl. 16806 : 11 : 5 chacun et le dernier de fl. 15967 : 3 : 7 à-peu-près.

Sixième Exemple.

Mais si dans le problème précédent, la question posée étant la même, on désire que les 5 premiers prix ne soient pas égaux entre eux, mais que le premier soit au deuxième comme 2 est à 3, le deuxième au troisième comme 9 est à 10, le deuxième au quatrième comme 4 est à 3, le quatrième au cinquième comme 9 est à 17, on trouvera

fl. 12553 : 12 : $8\frac{2}{5}$ après 6 ans à-peu-près
» 18830 : 8 : $12\frac{3}{5}$ après 9 ans
» 20922 : 14 : $3\frac{1}{3}$ après 14 ans
» 14122 : 16 : $9\frac{9}{20}$ après 17 ans
» 26676 : 9 : $1\frac{17}{20}$ après 24 ans
» 6893 : 18 : $12\frac{11}{30}$ après 30 ans.

Septième Exemple.

Supposons comme précédemment qu'on ait tiré une tonne d'or, à recevoir après 15 ans, et qu'on veuille diviser ce prix en 6

autres prix formant une progression arithmétique. Le premier prix doit être payé au bout de 2 ans, les cinq autres après 6, 9, 14, 17 et 30 ans respectivement. On demande quel doit être le montant de chaque prix. Réponse

fl. 5715 : 1 : 11 $\frac{2}{3}$ après 2 ans
» 10095 : 14 : 5 $\frac{14}{15}$ après 6 ans
» 14476 : 7 : 0 $\frac{1}{15}$ après 9 ans
» 18856 : 19 : 10 $\frac{7}{15}$ après 14 ans
» 23237 : 12 : 4 $\frac{11}{15}$ après 17 ans
» 27618 : 4 : 15 après 30 ans.

Neuvième Problème.

On demande quel sera l'avantage de l'organisateur de la loterie suivante, en d'autres termes combien de % il gagnera.

Il y a 26000 lots dans la loterie à 20 fl. la pièce. Tandis que dans les autres loteries on retient 8 % des prix, ici on n'en retient que 2 %. Les prix sont les suivants:

Prix	de	Florins	Prix	de	Florins
1	—	50000	25	—	240
1	—	30000	60	—	150
2	—	20000	200	—	120
4	—	10000	300	—	100
5	—	3000	400	—	50
10	—	1500	1000	—	40
18	—	1000	2004	—	30

Il y a donc en tout 4030 prix, dont la valeur totale est de 397120 florins, de sorte qu'il y a un peu moins de 5 $\frac{1}{2}$ non-valeurs contre 1 prix. Ce qui rend cette loterie avantageuse pour les joueurs plus que les autres, c'est qu'avec un seul lot on peut tirer différents prix, de 50000, de 30000, de 20000, de 10000 florins, etc. Lorsque le tirage a lieu, les billets gagnants sont mis à-part. Ensuite on met de nouveau dans l'une des boîtes tous les prix et toutes les non-valeurs de la loterie et dans l'autre les billets qui

ont déjà gagné un prix. Au deuxième tirage ces billets peuvent donc gagner de nouveau des prix et tous les prix qu'ils gagnent doivent être payés. On continue à distribuer les prix de la même manière, jusqu'à ce que tous les billets ont tiré une non-valeur. On voit donc clairement qu'un seul lot peut tirer 4 fois ou 5 fois de suite ou davantage, le prix de fl. 50000. On trouvera aisément que l'organisateur de la loterie devra payer 88 $\frac{10023}{17576}$ florins seulement chaque fois qu'il en reçoit 100.

Mais avant de finir ce traité nous nous sentons obligés de dire que nous avons appris, après que la page 58 avait déjà été imprimée, que dans la loterie de Lorraine (voir page 48) il y avait encore une condition au désavantage de l'organisateur de la loterie. Notre erreur provient de ce que nous avons consulté trop tard là-dessus la deuxième édition de „l'Analyse" et que le projet de la loterie nous avait été communiqué par écrit par quelqu'un qui avait omis la dite condition du tirage. C'était la suivante. Tous les billets des joueurs sont dans une boîte, tous les prix dans l'autre boîte. On tire alors un billet et un prix, et après avoir noté le résultat, on écarte le prix, mais le billet est remis dans la boîte, de sorte qu'un même billet peut tirer beaucoup de prix ou même tous les prix. On voit que plus une même personne gagne de prix, plus grand aussi est le désavantage de l'organisateur de la loterie. En effet, si un seul joueur gagnait tous les prix, l'organisateur devrait rendre leur argent à tous les autres joueurs. En ajoutant cette condition aux autres on trouvera, en faisant le calcul pour le cas du jeu aux dés analogue à cette loterie, 184064 fl. et environ 10 sous, ce qui est le résultat trouvé par ces Messieurs. Cela n'empêche pas toutefois notre méthode et notre résultat trouvé à l'aide de cette méthode d'être bons, vu que la méthode s'applique exactement au problème tel que nous nous l'étions proposé.

HYPOTHÈSES SUR L'ÉTAT DE L'ESPÈCE HUMAINE.

Raison de désigner ces recherches par le mot d'hypothèses.

Je désigne ces recherches par le mot „hypothèses" — à cause de leur incertitude. En effet, on en sait encore fort peu de chose: on ne dispose pas d'un nombre suffisant d'observations relatives à toutes les contrées. Il me semble que sur ce terrain on découvrira encore des choses étonnantes qui nous permettront de comprendre en partie la sagesse suprême dont il a plu au Créateur de l'univers de se servir pour l'entretien du genre humain: l'on devrait s'attendre au contraire à voir naître en peu de temps une confusion générale si les hommes les plus intelligents, quand même ils auraient le pouvoir et la volonté d'exécuter des projets conformes à leurs idées, gouvernaient le monde. D'aucuns pourraient soutenir que le sujet de ces recherches est encore si enveloppé de ténèbres qu'on ne peut y voir clair. Il est possible toutefois de faire des conjectures en se servant des observations peu nombreuses dont nous disposons. Et quoique je puisse avoir commis des erreurs dans plusieurs propositions, mon travail n'aura pas cependant été inutile: d'autres auteurs, disposant d'un plus grand nombre d'observations, se sentiront peut-être encouragés par là à publier un grand nombre de théories nouvelles.

Ces recherches ne sont pas infructueuses. D'autres le sont: on examine souvent avec beaucoup de peine des choses qui ne peuvent servir à rien. J'en citerai ici un exemple. CLAAS KAMMERS a copié une bible hollandaise et il a fait cadeau de sa copie à la bibliothèque de Delft; il y a noté que dans la bible il a compté les nombres suivants de chapitres, de versets, de mots et de lettres:

Dans l'ancien testament.		Dans le nouveau testament.	Somme totale.
Chapitres	929	260	1189
Versets	23213	7979	31192
Mots	592439	181253	773692
Lettres	2728100	838380	3566480

Il a trouvé le mot „et" 35543 fois dans l'ancien et 10684 fois dans le nouveau testament, en tout 46227 fois. Dans les livres

apocryphes il a trouvé 183 chapitres, 6081 versets et 152185 mots. Pour ma part, je n'ai nulle envie de répéter ses dénombrements pour voir s'il ne s'y trouve aucune erreur.

Je ne donne pas cet exemple pour faire croire que les sciences spéculatives soient absolument condamnables. Les Anciens ont examiné la nature des lignes courbes et ne savaient en faire aucune application utile. Actuellement on en voit la grande utilité: la théorie de ces lignes est indispensable pour calculer les orbites des corps célestes et dans une grande partie de la physique. Quoique les problèmes que Diophante nous a laissés et d'autres beaucoup plus difficiles de la même espèce qu'on a inventés récemment, soient fort peu utiles, ils ont pourtant l'avantage de nous faire voir jusqu'où l'intelligence humaine, avec le secours de l'algèbre, peut venir dans ces sortes de questions. Les arithméticiens se proposent d'écrire dans un carré divisé en d'autres carrés plus petits, chaque côté étant divisé dans le même nombre de parties, tous les nombres entiers depuis l'unité, de telle manière que lorsqu'on prend la somme d'une rangée horizontale, d'une rangée verticale on d'une diagonale, on obtient toujours le même nombre. Une figure de ce genre est appelée un carré magique. MOSCHOPULE 1), AGRIPPA 2), BACHET 3), FRENICLE 4), ARNAULD 5), PRESTET 6), POIGNARD 7), LA HIRE 8) et SAUVEUR 9), se sont donné beaucoup de peine pour en indiquer les proprietés. M. FRENICLE a fait voir qu'un carré magique à 16 compartiments, tel que celui dessiné ici, peut être construit de

7	11	14	2
6	10	15	3
12	8	1	13
9	5	4	16

1) Comme cela se voit dans un manuscrit grec, conservé dans la bibliothèque du roi de France.

2) De Occult. Philosoph. lib. 2, cap. 22, p. 149—153.

3) Probl. Plais. 1624.

4) Ouvrag. de Mathém. & Physique, Paris 1693, p. 423—507.

5) Nieuwe beginselen der Meetkonst (Nouveaux éléments de géométrie), p. 325. Amst. 1677.

6) Nouv. Elém. des Mathém. Paris 1694, p. 417—428. Voir aussi DE LA LOUBÈRE, Descript. du Royaume de Siam, p. 235—288.

7) Traité des Quar. Sublim. Brux. 1704.

8) Mémoires de l'Acad. 1705.

9) Mémoires de l'Acad. 1710, p. 124—184.

880 façons 1), j'ai trouvé qu'il était cependant encore loin d'avoir découvert le nombre total des différents carrés magiques de cette espèce. PIERRE KARMAN, bourgmestre de de Rijp, a fait plusieurs nouvelles inventions au sujet des carrés magiques; il a indiqué comment on peut les construire en pliant le papier, en déplaçant les chiffres, etc., chacun de ces changements laissant intacte la propriété dont nous avons fait mention. Un carré par exemple dont le côté est divisé en trois parties peut être construit de 8 façons, un carré dont le côté est divisé en quatre parties, de 5760 façons, et ainsi de suite. Cela n'a aucune utilité pratique, il est vrai; mais on voit par là que les nombres ont des propriétés admirables. Dans la géométrie il n'y a pas moins de propriétés plus curieuses encore, surtout où elle est appliquée aux lignes courbes; mais pour ne pas trop m'écarter de mon sujet, je n'en donnerai pas d'exemples pour le moment.

Nombre des hommes.

Revenons aux questions qui font le sujet de ce traité. La première question digne d'être examinée qui se présente dans nos recherches, c'est celle de savoir quel est approximativement le nombre des hommes qui à l'heure actuelle habitent la terre. Mais il est fort malaisé d'y répondre. Je ferai voir par un exemple combien les réponses données par des auteurs de mérite sont différentes. La première colonne contient les nombres donnés par RICCIOLUS d'après BOTTERUS 2), la deuxième ceux donnés par HUBNER d'après VOSSIUS 3), la troisième est tirée d'une table géographique 4) et la quatrième contient les nombres donnés par RABUS d'après VOSSIUS 5).

---

1) Oeuvr. de Mathém. Paris 1693, p. 484—507.

2) Dans son dernier livre de géographie, p. 679. Venise 1672.

3) HUBNER, Kort Begrip van de Oude en Nieuwe Geographie (Aperçu de l'ancienne et de la nouvelle géographie), p. 15. Amst. 1707; tiré de VOSSIUS, Var. Observ. Lond. 1685.

4) Publiée à Utrecht, par C. SPECHT, en 1704.

5) Vermaakelijkheden der Taalkunde (la Philologie amusante), p. 316. Rotterd. 1688. L'un des deux, en copiant VOSSIUS, doit avoir commis des erreurs.

<table>
<tr><th></th><th>Millions.</th><th>Millions.</th><th>Millions.</th><th>Millions.</th></tr>
<tr><td>Espagne</td><td>10</td><td>2</td><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>France</td><td>19 ou 20</td><td>5</td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Italie, Sicile et d'autres îles</td><td>11</td><td>2</td><td>11</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Grande-Bretagne</td><td>4</td><td>3</td><td>8</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Allemagne, partie septentrionale</td><td>20</td><td rowspan="2">5</td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>La Néerlande, ou les 17 provinces.</td><td>4</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>La Suède, le Danemarc et la Norvège</td><td rowspan="2">8</td><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>La Moscovie européenne</td><td>$4\frac{5}{6}$</td><td>16</td><td>3</td></tr>
<tr><td>La Turquie européenne, la Grèce, etc.</td><td>16</td><td>$5\frac{2}{3}$</td><td>16</td><td>$5\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>La Pologne et la Prusse</td><td>6</td><td>$1\frac{1}{2}$</td><td>7</td><td>$2\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>En Europe la somme est 99, mais il pose</td><td>100</td><td>30</td><td>117</td><td>31</td></tr>
<tr><td>En Asie</td><td>500</td><td>300</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>En Afrique</td><td>100</td><td rowspan="2">100</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>En Amérique</td><td>200</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sur toute la terre</td><td>900</td><td>430</td><td></td><td></td></tr>
</table>

La première colonne, d'après BOTTERUS, contient pour l'Europe des chiffres beaucoup plus exacts que ceux de VOSSIUS, comme nous le verrons mieux dans la suite.

Plaine qui pourrait contenir tous les hommes.

Supposons pour un instant avec RICCIOLUS qu'il y ait 900 millions d'hommes sur la terre, (quoique pour ma part je ne crois point qu'on en puisse trouver un si grand nombre, attendu que les nombres relatifs à l'Asie et à l'Amérique me paraissent trop élevés) et qu'à chaque homme, grand ou petit, on donne une place de même forme, savoir un carré d'un côté de deux pieds de Rhijnland 1). Si l'on dispose d'une plaine carrée, dont le côté est de $3\frac{1}{3}$ mille hollandais 2), tous les hommes qui habitent la terre peuvent alors y trouver place. Et si l'Europe entière était partagée par ses habitants en 100 millions de parties égales, chacun pourrait avoir une part de 9 arpents ou un morceau carré d'un côté de 74 verges de Rhijnland 3).

Nombres des habitants

Le duc de Bourgogne, père du roi règnant de France, LOUIS XV,

---

1) Le pied de Rhijnland est égal à 31,4 c.M. (N. d. tr.).

2) Le „mille hollandais" dont parle STRUYCK, a donc une longueur d'un peu plus de 5650 M. (N. d. tr.).

3) La verge de Rhijnland est égale à 12 × 31,4 c.M., c.à.d. à 3,77 M. (N. d. tr.).

demanda à son grand-père LOUIS XIV qui règnait alors de faire publier par les intendants un état précis du royaume. Cet état fut publié en 40 volumes; mais comme la lecture de ces volumes aurait donné trop de peine au duc de Bourgogne et comme plusieurs mémoires étaient absolument défectueuses (quelques-uns n'avaient pas bien fait attention aux questions posées, plusieurs aussi, par ignorance, donnaient des relations confuses), le comte DE BOULAINVILLIERS en tira des extraits pour le duc, où il ajouta des remarques de sa main. Conséquemment plusieurs intendants reçurent de nouveaux ordres dans le but de leur faire donner de meilleures réponses: en répondant aux questions relatives au nombre des habitants, quelques-uns avaient omis les femmes, d'autres les enfants, d'autres les ecclésiastiques; d'autres encore, supposant que les questions posées se rapportaient aux levées de soldats, s'étaient bornés à donner le chiffre des jeunes gens; même il paraît que quelques-uns s'étaient contentés d'estimer le nombre des habitants au moyen d'évaluations grossières. Considérons brièvement quelques-unes de ces réponses. Dans l'arrondissement de Paris, excepté la ville et son domaine, donc en 52 villes et 3596 villages, on trouva 856938 personnes, parmi lesquelles 39441 hommes au-dessus de 15 ans. Ce dernier nombre est toutefois complètement inadmissible; je pense qu'il y manque un chiffre et qu'il faudra lire 239441. Ce nombre-là doit probablement indiquer celui des hommes de 16 à 56 ans, c.à.d. des hommes capables de porter les armes. Dans l'arrondissement de Rouen on a compté environ 700000 personnes 1), parmi lesquelles il y en a moins de 50000 qui mangent leur pain dans l'aisance; les autres dorment sur de la paille. Dans la généralité d'Orléans le nombre des hommes au-dessus de 20 ans fut évalué à 178571 2). A Metz, à Toul et à Verdun on trouva 350700 personnes, parmi lesquelles les domestiques étrangers ne sont pas compris 3), dans le Comté français 336720 personnes, plus 4000 ecclésiastiques 4); dans la Flandre française 201012 personnes 5); en Bretagne 1700000

de différentes parties de la France.

1) L'état de France, par M. le comte DE BOULAINVILLIERS, tome 2, p. 11. Londres 1727; la capitale qui contient environ 66000 personnes n'est pas comprise dans le nombre donné.

2 Idem. Tome 1, p. 132.

3 p. 146.

4 Tome 1, p. 289.

5 Idem, p. 383.

personnes 1), tandis que M. BASVILLE n'en donne que 1241250 2); à Bourges 291232 personnes 3), dans le bourbonnais 324232 personnes 4). Dans la ville de Bordeau il y a 5000 maisons et à-peu-près 34000 habitants. Dans l'arrondissement de Pau il y a 198000 hommes et femmes 5), dans le lyonnais 363000 personnes, dont 69000 dans la ville de Lyon 6); dans le Dauphiné 543585 personnes 7); en Provence 1006976 personnes, dont 94079 nouveaux convertis. Dans la liste relative à des endroits particuliers, il y a une erreur notable par rapport à Sisteron 8): M. BASVILLE donne pour les deux arrondissements qui se trouvent dans la province de Languedocq 1441000 habitants 9), mais selon DE BOULAINVILLIERS le nombre des habitants catholiques était de 1341487 personnes et celui des nouveaux convertis de 198493 personnes 10). Parmi ces dernières il y avait 440 familles nobles. De cette province le roi a tiré annuellement pendant les 9 années qui précèdent l'an 1697, une somme moyenne de 17613711 livres, tandis que le revenu qu'il tirait vers ce temps de la ville de Paris, où les impôts sont plus lourds que dans les provinces, était de 22000000 livres par an. A Alençon on trouva 485817 personnes 11); à Poitiers 612621 personnes 12); à la Rochelle 360000 personnes 13); à Tours 1066496 personnes 14). Cela suffit pour faire voir combien le nombre des habitants de la France est grand. C'est pourquoi je terminerai ici l'énumération du nombre des habitants de ses diverses parties, après avoir donné encore les nombres relatifs à

1) Tome 2, p. 78.

2) p. 577.

3) p. 214.

4) p. 235.

5) p. 350.

6) Dans cette ville Octavio May, il y a cent ans environ, inventa par hasard, ayant tenu un peloton de soie dans la bouche, l'art de rendre la soie luisante.

7) L'auteur nommé, tome 2, p. 444.

8) Idem, p. 500.

9) Mémoir. de M. le comte DE BOULAINVILLIERS, p. 577.

10) Le même auteur, tome 2, p. 528; il semble que le nombre de M. DE BASVILLE doit être 1541000.

11) Le même auteur, tome 2, p. 44.

12) Idem, p. 111.

13) Idem.

14) Tome 2, p. 151. Le nombre des foyers est de 266524. Plusieurs se semblent être contentés de compter les foyers et prennent alors 4 personnes par foyer; d'autres 5 personnes à-peu-près.

l'Alsace, province du roi de France. Dans l'Alsace il y a trois arrondissements avec 66 villes et 1065 bourgs et villages.

	Personnes	Catholiques	Luthériennes	Réformées	Juives
Brissac...........	65352	63180	1050	225	897
Strasbourg........	122735	70970	45740	4558	1467
Landau...........	68913	37504	22258	7350	1801
	257000	171654	69048	12133	4165

Comme la méthode suivie pour évaluer le nombre des habitants ne fut pas approuvée par le Comte DE BOULAINVILLIERS, il pensa qu'il vaudrait mieux qu'on donnât aux intendants l'ordre de faire faire le dénombrement du peuple par les ecclésiastiques, chacun dans sa paroisse. Il paraît qu'on a donné suite à cette idée, car dans le Mémoire présenté en 1711 par M. de FOUGEROLLE au roi de France, dans le but de faire répartir plus également les impôts, ou trouve que, d'après les données des intendants des provinces, en l'année 1700, le nombre total des habitants du royaume était de 19385378 personnes 1), et celui des paroisses de 40812 2). Nombre total des habitants de la France.

M. KING a calculé qu'il y a en Angleterre 5500000 personnes 3); le nombre des paroisses y est de 9913 et celui des maisons, d'après le recensement de 1693, de 1175951 4). D'après ce dernier chiffre on pourrait fixer par hypothèse le nombre des habitants à 6 millions. Le capitaine SOUTH estime que le nombre total des habitants d'Irlande est de 1034102 5). Commettrait-on une grande erreur en supposant que le nombre des habitant de la Grande-Bretagne est de 8 millions au moins? Ce nombre est considérablement plus grand que les 3 ou 4 millions de VOSSIUS ou de BOTTERUS. La Grande Bretagne.

Dans le domaine de Venise le nombre des maisons, en 1672, était de 494325; elles étaient habitées par 2636900 personnes 6). En 1556 il y avait dans le royaume de Naples, en 1463 localités, 483478 foyers 7). Si l'on tient compte en outre de l'État ecclésiastique, du grand-duché de Toscane et de beaucoup d'autres états Venise.

1) Mém. du Comte DE BOULAINV. p. 577. Lond. 1718.

2) Idem, p. 547.

3) DERHAM „la Physique théologique", p. 193.

4) „The present State of Great-Britain" par JOHN CHAMBERLAYNE, § 1, p. 2.

5) Philos. Trans. No. 261, p. 520.

6) RICCIOLUS, „Géographie", livre 12, p. 678, Venise 1672.

7) Le même auteur, à l'endroit cité.

appartenant à l'Italie, on voit que l'évaluation de VOSSIUS s'écarte beaucoup de la vérité.

La Pologne et la Prusse. Le nombre donné par le même auteur pour la Pologne et pour la Prusse, est également erroné. En effet, en considérant le nombre annuel des naissances et des décès dans le royaume de Prusse, on peut dire avec certitude qu'à moins de supposer des épidémies extraordinaires, ce dernier royaume à lui seul a plus d'habitants que VOSSIUS n'en donne à l'ensemble des deux pays.

La Chine. On prétend qu'il y a 200 millions de chinois. Ce nombre serait-il exact? Je crois découvrir d'étranges contradictions dans les récits que nous en font les missionnaires. Dans le siècle précédent on a compté dans les 15 provinces de ce pays 10128789 familles 1) ou, suivant un autre auteur, 11502872 familles 2). Pour le nombre d'hommes, âgés de plus de 20 ans, ou aurait trouvé 58916783 3); parmi lesquels ne sont pas compris les personnes appartenant à la cour de l'empereur, les soldats, les bonzes des deux sexes, les mendiants et les habitants des vaisseaux. Ce dernier nombre ne peut pas beaucoup différer de la vérité, vu que c'est la somme des nombres calculés pour les diverses provinces. Or, on donne en même temps le nombre des familles, qui doit s'accorder avec le nombre d'habitants. Mais comment chaque famille peut elle fournir 5 hommes au-dessus de 20 ans? Y aurait-il 18 ou 20 personnes dans chaque famille? Il me semble beaucoup plus probable que le dernier nombre donné exprime celui des hommes, des femmes et des enfants qui habitaient la Chine à cette époque, à l'exception de ceux qui ne furent pas recensés et dont nous avons mentionné plus haut l'exclusion. Il paraît que c'est plutôt en vue des impôts qu'on a compté les familles et le peuple qu'en vue de la guerre; car dans ce dernier cas il aurait fallu déduire de la somme totale les hommes âgés de plus de 56 ans (ou un nombre voisin), en tant qu'incapables de servir dans l'armée. En 1015 on a compté de la même manière le nombre des paysans ou de ceux qui habitent la campagne; on a trouvé un nombre total de 21976965 4). Il en résulte qu'en prenant pour le peuple entier à l'époque en question le même nombre qu'au siècle pré-

1) Monarch. Sin. Tab. Chron., p. 106.

2) Idem, p. 105.

3) Monarch. Sin. Tab. Chron., p. 105.

4) Histor. Sin., p. 59.

cédent, nous trouvons dans les villes 37 millions de personnes âgées de plus de 20 ans. LE COMTE raconte avoir vu en Chine 7 ou 8 villes aussi grandes que Paris; il rapporte en outre qu'il y a en Chine plus de 80 villes du premier ordre, telles que Lyon ou Bordeaux; parmi les 260 villes du second ordre plus de 100 sont comparables à Orléans; et parmi 1200 villes du troisième ordre, on en trouve 500 ou 600 de la grandeur de La Rochelle ou d'Augoulesme 1). Or, il y a dans la ville de Lyon 79000 habitants, et il y en a 34000 à Bordeaux. Mais en admettant qu'il y a 200 millions d'habitants en Chine, nous trouverions que le nombre des habitants des villes serait de 125 2) millions, eu égard au nombre des habitants de la campagne; par conséquent il devrait y avoir dans chaque ville 80000 habitants en moyenne, ce qui est incompatible avec le rapport de LE COMTE. Un autre auteur raconte qu'il y a 70 millions de chinois et que le nombre d'hommes capables de servir dans l'armée est de 25709603 3). Ce nombre ne doit-il pas être 15709603? Si nous adoptons ce dernier nombre, l'accord avec les 58 millions, dont nous avons fait mention plus haut, devient meilleur 4). En somme, il n'est pas déraisonnable de supposer que les chinois soient trois fois plus nombreux que les français; et en calculant la moyenne des habitants d'une partie donnée de chacun des deux états, on trouvera alors que la densité de la population en France est deux fois plus grande que celle de la Chine. Si quelqu'un pense que le nombre des chinois doit être supérieur au nombre donné ici parce qu'on y trouve un si grand nombre de villes étonnamment populeuses et qui ont donné lieu a des descriptions enthousiastes, qu'il songe pourtant que le nombre de ces villes, eu égard à la grandeur du pays, est beaucoup plus petit que le nombre correspondant des villes françaises ou néerlandaises. De plus, la manière de vivre y est tout autre et telle qu'on voit beaucoup plus de personnes dans les rues.

Quant aux autres parties de l'Asie, telles que l'Arabie, la Tar-

1) Nouv. Mémoir. sur l'Etat de la Chine, tom. I, p. 123. Amst. 1698.

2) En retranchant 22 millions de 200 millions, on trouve 178 millions, ce qui donne pour chaque ville en moyenne un peu plus de 100000 habitants. (N. d. tr.).

3) LEUTHOLF, p. 571, d'après SAVEDRA, p. 71. Il tire le dernier nombre de NIEUWHOF, mais à la page 9 on trouve le nombre 58940234.

4) Str. prend donc 58 millions pour le nombre des habitants de la Chine; parmi lesquels il peut y avoir à son avis environ 16 millions d'hommes capables de servir dans l'armée. (N. d. tr.).

tarie moscovite et la Tartarie elle-même, ces pays étendus sont loin d'être aussi populeux que la Chine. D'après un calcul sommaire, le nombre d'habitants de l'Asie et des îles paraît être de 250 millions environ. Il est difficile de faire une hypothèse plausible concernant l'Afrique. Anciennement il y avait 7 millions d'hommes en Egypte 1). L'Amérique du Nord, à l'exception des côtes, a fort peu d'habitants; l'Amérique du Sud est également peu populeuse. En somme, commettrions-nous une grande erreur en prenant le chiffre de 500 millions pour le nombre des habitants de toute la terre?

Naissances et décès.

La question est de savoir si le nombre des habitants de toute la terre ou des grands royaumes augmente, diminue ou reste stationnaire. J'entends parler des pays où le nombre des immigrants et celui des émigrants sont fort petits par rapport au nombre total de leurs habitants. Le roi de France, CHARLES IX, a fait faire une dénombration de ses sujets il y a 160 ans: on trouva un nombre supérieur à 20 millions 2). Si l'on admet que la différence en moins du nombre trouvé en 1701 s'explique par le départ des réformés, il s'ensuit qu'en beaucoup plus d'un siècle le nombre des français est resté à-peu-près invariable. Cela paraît d'ailleurs croyable si l'on songe qu'une trop grande augmentation de la population rendrait le pays trop plein de monde, de sorte qu'un grand nombre d'habitants ne trouveraient pas de quoi se nourrir; et si ce nombre diminuait trop, la terre pourrait se dépeupler. L'un et l'autre semble être contraire à la volonté du Créateur. Le nombre des habitants du monde reste donc environ constant. Au premier abord on pourrait donc croire qu'annuellement le nombre des naissances égale à-peu-près le nombre des décès. C'est ce que nous examinerons maintenant.

A Augsbourg on a noté depuis plus de deux siècles le nombre des décès 3). Et comme le nombre des habitants d'une ville de ce genre peut diminuer ou augmenter, le mieux me semble de prendre le nombre des décès dans la première année, et le nombre correspondant 100 ans plus tard: en ajoutant ces deux nombres qui ne sont pas élevés et en multipliant la moitié de la somme par 100, on trouve à-peu-près le nombre des décès abstraction

---

1) DIOD. SIC. livre I. MARSHAM, Can. Chron. p. 420 et 421.

2) D'après le dictionnaire de MORERI, au mot France, p. 543. LEUTHOLF grande scène p. 488. LA CROIX dans sa géographie, 2ième partie, p. 9.

3) Philos. Trans. No. 428, p. 94—97.

faite de ceux qui sont morts pendant des épidémies. En soustrayant ce nombre du nombre total des décès pendant le siècle considéré, on trouve combien d'habitants ont péri par les épidémies. Leur nombre est environ la cinquième partie du nombre total des décès. Nous considérons ici comme dus à des épidémies ou des maladies extraordinaires tous les décès qu'on trouve en soustrayant du nombre annuel des décès celui des décès pendant une des années où l'état sanitaire était excellent. Jusqu'en 1600 Augsbourg demeura à-peu-près dans le même état; durant le siècle suivant le nombre de ses habitants diminua considérablement. J'ai calculé que pendant ce temps aussi une cinquième partie de tous les décès était dû à des maladies contagieuses ou extraordinaires. J'ai examiné la même chose pour Dresde en Saxe 1) d'après les régistres mortuaires de 101 années consécutives, et je suis parvenu au même résultat.

A Amsterdam 187666 personnes sont mortes pendant les 23 dernières années, ce qui fait annuellement 8159 en moyenne. Or, le plus petit nombre de décès a eu lieu en 1735: ce nombre est 6533, et l'on trouve à-peu-près 6533 : 8159 = 4 : 5. A Londres, d'après les régistres, 2431550 personnes sont mortes pendant 134 ans, de 1604 à 1737; parmi ces décès 152302 étaient dus à la peste, c. à. d. la 16ième partie. Pendant les 58 dernières années aucun décès dû a la peste n'est survenu. Il paraît que dans une ville ou dans un royaume où le nombre des habitants ne diminue ni n'augmente considérablement, le nombre annuel des naissances surpasse celui des décès pendant les périodes où l'état sanitaire est bon, c. à. d. où il n'y a pas de maladies extraordinaires, et que l'augmentation du nombre des habitants qui en devrait résulter, est empêchée par la peste, la guerre et les autres causes de nombreux décès qui opèrent de temps en temps. De cette façon le nombre des hommes demeure à-peu-près stationnaire 2).

Nombres des décès à Londres pour différents âges.

Pour savoir quel est le nombre de personnes de chaque âge qui meurent annuellement, on a tenu à Londres, depuis 10 ans, des régistres plus détaillés qu'auparavant. Je me contenterai ici de publier les nombres de décès trouvés dans cette ville pendant sept ans. On voit que l'année 1732 a été pour Londres une année

1) Philos. Trans. No. 428, p. 89—93.

2) JOHN GRAUNT rapporte, p. 61, qu'à la campagne, dans les environs de Londres, il y a environ 70 naissances contre 58 décès. Ces nombres se rapportent à une période, où l'état sanitaire est bon.

où l'état sanitaire était excellent. Pendant les années 1733 et 1734 il règnait une maladie parmi les enfants; mais pour les personnes au-dessus de 30 ans, l'état sanitaire était excellent en 1734. En 1733 il y avait une grande mortalité parmi les vieillards. Pendant les 4 premières années le nombre annuel des enfants nés morts était en moyenne de 658. J'ai pris le même nombre pour les deux dernières années, attendu que le vrai nombre m'était inconnu; mais l'erreur ne peut guère dépasser 20 personnes. Les enfants morts en-dessous de deux ans, dont il est fait mention dans la table, étaient tous nés vivants.

En l'année..........	1731	1732	1733	1734	1735	1736	1737
En-dessous de 2 ans..	9234	8865	11082	10091	9082	9922	9396
De 2 à 5 ans.....	2096	1517	2409	2830	1963	2706	2613
» 5 » 10 »	932	716	957	1228	755	993	1008
» 10 » 20 »	806	611	754	829	691	816	885
» 20 » 30 »	1916	1627	1857	1718	1605	2139	2241
» 30 » 40 »	2351	2175	2564	2212	2158	2445	2652
» 40 » 50 »	2261	2121	2685	2154	2138	2357	2578
» 50 » 60 »	1839	1741	2196	1668	1684	2121	2270
» 60 » 70 »	1500	1581	1871	1324	1339	1666	1650
» 70 » 80 »	913	974	1188	793	872	1114	1164
» 80 » 90 »	628	660	804	484	565	557	576
» 90 » 100 »	108	121	198	66	84	83	127
Au-dessus de 100 ans.	5	12	12	4	12	4	5
	24589	22721	28577	25401	22948	26923	27165
Morts par la fièvre...	3225	2939	3831	3116			
Morts par la petite vérole	2640	1197	1370	2688			

M. Maitland, dans son Histoire de Londres, raconte que les régistres des décès y sont fort défectueux 1), parce qu'on y trouve uniquement ceux qui sont enterrés dans les cimetières des paroisses, et non pas ceux qui sont enterrés dans l'église St. Paul, dans l'Abbaye de Westminster, dans les différentes chapelles, dans les hôpitaux et dans les cimetières des Non-

1) The History of London, p. 540.

Conformistes 1). Pour corriger ce défaut, l'auteur nommé a noté, qu'en-dehors des décès enregistrés on a encore enterré en 1729 à Londres et dans les faubourgs (63 localités) les nombres suivants de personnes, y compris les 24 qui ont été exécutés à Tyburn:

Dans différentes chapelles, hôpitaux et paroisses en-dehors de la ville........................	1371	personnes.
Dans le cimetière des Juifs, parmi lesquels 85 portuguais	125	»
Dans les cimetières des presbytériens..........	770	»
Dans ceux des quakers........................	246	»
Dans ceux des anabaptistes..................	210	»
Dans ceux des indépendants..................	118	»
Somme totale....	2240	personnes.

Mais comme pendant 14 années, depuis 1724 jusqu'à 1737, le nombre annuel des personnes enterrées a été de 26906 en moyenne suivant les régistres ordinaires, et de 29722 en 1729, il paraît que la mortalité en cette dernière année était supérieure à la mortalité moyenne. C'est pourquoi je diminue le nombre des décès non-enrégistrés dans la même proportion, de sorte que ce nombre se réduit à 2543, et je conclus qu'à Londres et dans les faubourgs, c. à. d. dans ceux dont on tient compte dans les régistres, on enterre actuellement environ 29450 personnes par an, en moyenne 2). Ce nombre est au nombre correspondant pour la ville d'Amsterdam, comme 65 est à 18.

Tables des rentes viagères.

D'après les régistres tenus à Breslau, durant 5 ans, depuis 1687 jusqu'à 1691, M. Halley a construit une table servant à calculer les rentes viagères; il y a noté chaque année le nombre de per-

1 En 1562 on a enrégistré pour la première fois le nombre des décès à Londres, pour savoir si la peste augmentait ou diminuait. En cette année parmi 23630 personnes enterrées 20136 étaient mortes par la peste. En 1592 la peste revint. En cette année on commença par publier annuellement la liste générale des morts. Deux ans plus tard on publia, outre la liste générale, des listes hebdomadaires donnant les nombres des baptisés et des morts. Mais lorsque la peste avait fini de sévir, la publication des listes cessa; elle ne recommença qu'en 1603. En 1629 on nota pour la première fois dans les régistres les différentes maladies ou accidents qui avaient fait mourir les personnes enterrées. En 1728 on y ajouta l'âge des morts, de 10 à 10 ans, et celui des enfants, morts en-dessous de 2 ou en-dessous de 5 ans.

2) Les femmes désignées pour cette fonction (ou ceux qui les remplacent) examinent tous les cadavres; mais les clercs des paroisses enrégistrent seulement ceux qui sont enterrés dans leurs paroisses.

sonnes vivantes de chaque âge 1). Le nombre moyen des naissances y était de 1238 par an 2). De ce nombre 248 sont morts avant d'avoir atteint l'âge d'un an; 198 sont morts de 1 à 6 ans; de sorte que 692 seulement parmi les enfants qui étaient nés ont vécu plus de six ans.

J'ai construit dernièrement deux tables. La première servait à faire connaître les nombres relatifs des personnes de différents âges vivant en même temps, et la seconde (qui sera indiquée plus loin par N°. 2) se rapportait aux rentes viagères. J'y avais admis une mortalité un peu plus forte que d'après la table de M. HALLEY, mais comme les nombres des hommes et des femmes n'y étaient pas séparés, je ne la donnerai pas en ce moment. D'ailleurs une occasion pour la publier se présentera peut-être plus tard.

Certains nombres de décès.

Suivant la table de M. HALLEY, la 5ième partie des hommes atteint l'âge de $59\frac{1}{2}$ ans. Voici les nombres de décès des vieillards pour deux villes allemandes:

A Leipzig en 2 années 2294 personnes sont décédées, parmi lesquelles
296 de 60 à 70 ans,
132 de 70 à 80 ans,
33 au-dessus de 80 ans.

A Lobau 355 personnes sont mortes en une année, parmi lesquelles
51 de 60 à 70 ans,
29 de 70 à 80 ans,
9 au-dessus de 80 ans.

Mais quelquefois il y a une grande mortalité parmi les hommes âgés de plus de 60 ans. En 1733, 4073 personnes âgées de plus de 60 ans sont mortes à Londres. L'année suivante la mortalité totale a été moindre d'une neuvième partie, tandis que le nombre des personnes mortes à un âge au-dessus de 60 ans a été de 2671 seulement. La première année 210 personnes de 90 ans et au-dessus sont mortes; l'année suivante 70 personnes seulement. Quelquefois il y a une grande mortalité parmi les enfants. En 1737, 6735 personnes sont mortes à Vienne et dans ses faubourgs, parmi lesquelles 2473 enfants âgés de moins d'un an, 1586 enfants de 1 à 10 ans, 178 personnes de 10 à 20, 400 de 20 à 30, 455 de 30 à 40, 490 de 40 à 50, 367 de 50 à 60, 359 de 60 à 70, 289 de 70

1) Philos. Trans. No. 196, p. 600.

2) Dans les régistres de Breslau, ou plutôt dans les parties de ces régistres publiées dans les Trans. anglaises, 1717, on trouve que ce nombre se rapporte aux „Christened", c. à. d. aux baptisés.

à 80, 110 de 80 à 90, 24 de 90 à 100 et 4 de 100 ans et au-dessus.

Il paraît que les anciens Egyptiens ont compté le nombre des habitants en un certain endroit et qu'ils ont trouvé qu'en moyenne $\frac{3}{100}$ de la population meurt annuellement. Il s'ensuit qu'en un siècle le nombre des décès est trois fois plus grand que celui de la population entière qui vit simultanément en un même endroit. Serait-ce là peut-être l'origine des générations dont on se servait anciennement en ce pays dans les calculs chronologiques? HÉRODOTE nous enseigne que trois générations vivent en un siècle 1). On pourrait croire qu'il est question ici de la durée du règne des rois ou des princes qui se sont succédé dans une même famille; mais j'y vois cette difficulté que l'expérience fait voir qu'en moyenne les rois ne règnent que 18 ou 20 ans 2). Et trois générations, du père au fils aîné, font environ 75 ou 80 ans 3). Générations.

Monsieur DERHAM dit que dans toutes les parties de l'Europe il y a une certaine régularité dans la reproduction du genre humain; que le nombre des mariages, ainsi que celui des naissances et des décès, est à-peu-près proportionnel au nombre total des hommes qui vivent en un pays 4). Mais jusqu'à présent il est difficile de trouver les chiffres qui expriment ces proportions. Pour trouver le nombre des habitants d'un pays on doit faire des conjectures grossières. Le géographe LA CROIX par exemple prit pour le nombre des habitants de Paris, en 1690, le chiffre de deux millions 5). A. DU BOIS prend pour ce nombre, à l'heure actuelle, un million 6). WILLIAM PETTY a calculé qu'en 1686 il y avait dans cette ville 488055 personnes. Selon AUZOUT leur nombre était de 487680 7). JOHN GRAUNT estimait que le nombre des habitants de Londres et de ses environs, en 1660, était de 460000 8). PETTY que nous venons de nommer, calcula qu'en 1686 il y avait là un nombre de 695718 personnes 9). Un autre La population de Londres et celle de Paris.

1) HÉRODOTE, lib. 2. p. 64. Ed. Steph. 1566.
2) NEWTON, la Chronologie des Grecs p. 54. Paris 1728.
3) Le même auteur, p. 56.
4) La physique théologique, p. 103.
5) Géographie, 2ième partie, p. 193.
6) La géographie moderne, § 1, p. 104, la Haye 1736.
7) Philos. Trans. No. 185, p. 237.
8) Natural and Political Observ. p. 57 et 58. Lond. 1662.
9) Phil. Trans. No. 185, p. 237.

auteur pense qu'il y a 1200000 personnes à Londres 1). M. MAITLAND, dans son Histoire de Londres, estime qu'il y a actuellement dans cette ville 95968 maisons 2), habitées par 725903 personnes 3). Il raconte qu'en 1631 la population de Londres a été comptée par ordre du conseil communal. Il a considéré les quartiers où le nombre annuel des décès était connu; il y a ajouté, d'après les régistres de 1729, les décès non notés, eu égard au chiffre de la population. Il trouve ainsi, toutes choses considérées, que dans les quartiers dont il est parlé séparément dans son ouvrage, on a compté en tout 73126 personnes; et que, pendant quatre années avant et quatre années après 1631, 2976 personnes en moyenne sont mortes annuellement dans les quartiers en question; parmi lesquelles ne sont pas comptées celles qui ont péri par la peste, savoir 53 personnes (on pourrait en retrancher encore 11 personnes parmi 2976 qui sont mortes en un an sur les vaisseaux de la Compagnie anglaise orientale). C'est en se basant sur ces chiffres, que l'auteur nommé a calculé le chiffre de la population actuelle de Londres. Il ajoute qu'il est impossible d'en acquérir une science plus certaine, à moins qu'on ne compte le peuple. Il faut croire que pour cette ville ses résultats ne s'écartent pas beaucoup de la vérité; il s'ensuit qu'en dehors des temps où sévit la peste, $\frac{1}{25}$ de la population meurt annuellement. Il est possible toutefois que dans d'autres pays le nombre annuel des décès est un peu plus petit. Quant à l'affirmation de KING d'après laquelle le nombre des habitants de l'Angleterre augmenterait de 880000 par siècle, elle est sans fondement et il est impossible d'en donner des preuves. Si l'on suppose avec le même auteur qu'en 1700 il y avait $5\frac{1}{2}$ millions de personnes dans ce royaume, je demande à ceux qui connaissent si bien l'histoire, de me dire quel était le nombre des Anglais au temps de BÉDA, ou même au commencement du onzième siècle.

Stoke-Damerell. A Stoke Damarell, dans la province de Devon en Angleterre, on a compté 3361 personnes en 1733. En une année 122 enfants y ont été baptisés et 28 mariages y ont été conclus 4). Mais quel

1 The present state of Great-Britain, p. 84. Lond. 1707.

2) P. 531. 3 p. 541.

4) Philos. Trans. No. 439, p. 171.

état peut-on faire du nombre des baptisés, vu la diversité des religions? Certainement aussi, plusieurs enfants sont morts avant le baptême. On ne peut donc rien conclure si ce n'est que pour cet endroit, si les années suivantes ou précédentes fournissent à-peu-près les mêmes chiffres, le nombre des baptisés doit être multiplié par un nombre inférieur à $27\frac{1}{2}$ pour nous fournir le chiffre total de la population. Trouver le nombre des habitants à l'aide de celui des naissances n'est pas chose aussi aisée qu'on le dirait à première vue. En effet, en un endroit le nombre des mariages par rapport à celui des habitants est plus grand qu'en un autre. Pour calculer le nombre des habitants d'après celui des décès, il faudrait se baser sur la plus faible mortalité et sur la mortalité moyenne. Il paraît d'ailleurs que dans un pays les hommes vivent en moyenne plus longtemps que dans un autre. Il y a encore un grand nombre d'autres difficultés que je n'énumérerai pas toutes. Je me bornerai à faire voir que les rapports des nombres des baptêmes, des décès [1]) et des enterrements sont différents dans diverses villes ou dans divers pays.

Je considérerai d'abord la ville de Gouda. Dans cette ville, en 32 années, depuis 1701 jusqu'à 1732 inclusivement, 18272 enfants ont été baptisés, 5582 mariages ont été conclu, et 19227 personnes sont mortes. Le nombre des naissances doit pourtant être quelque peu supérieur à celui des baptêmes, à cause de ceux qui meurent avant le baptême et à cause des Mennonites qui ont une communauté à Gouda. Pour faire voir les rapports des nombres des adhérents des divers cultes dans cette ville, je me bornerai à donner ici les nombres des baptêmes, des mariages et des décès pendant les 4 dernières des 32 années. Gouda.

	Réformés.	Remonstrants.	Luthériens.	Catholiques.	Ensemble.	Mariages.	Décès.
En 1729	287	72	17	165	541	182	587
1730	347	87	19	174	627	182	705
1731	308	74	10	165	557	154	548
1732	359	65	12	162	598	189	544
	1301	298	58	666	2323	707	2384

[1]) Au lieu de „décès" il faut sans doute lire „mariages". (N. d. tr.)

Le nombre des décès depuis 1726 jusqu'à 1733 inclusivement, donc pendant 8 ans, est de 651 par an en moyenne.

Enkhuizen. La ville d'Enkhuizen dans le siècle dernier est devenue beaucoup moins populeuse et a perdu un grand nombre de maisons. En 10 ans, depuis 1728 jusqu'à 1737, 4116 personnes y sont mortes et 1105 couples se sont mariés. Chez les réformés, 2112 enfants ont été baptisés, et chez les Luthériens 204. Pendant les sept dernières années, 229 enfants ont été baptisés annuellement, en moyenne, chez les réformés, et pendant les sept années 1721—1727 un nombre de 192 enfants. Il paraît donc que cette ville reprend son essor. Pendant 5 années, 1728—1732, 73 enfants ont été baptisés chez les luthériens, et 131 pendant les 5 années suivantes. A Amsterdam le nombre des enterrements est 20 fois plus grand, et le nombre des mariages y est 24 fois plus grand qu'à Enkhuizen. D'après la règle de M. MAITLAND, il y aurait dans cette ville 10 à 11 mille personnes, ce qui fait en moyenne 4 personnes par maison.

Paris. Les nombres des baptêmes, des mariages et des enterrements à Paris pendant 4 années ont été les suivants:

Année	Baptêmes	Mariages	Décès	Enfants trouves
1733	17825	4132	17466	2414
1734	19835	4133	15122	2654
1735	18862	3876	16196	2577
1736	18877	3990	18900	2681
Somme....	75399	16131	67684	10326
Annuellement....	18850	4033	16921	2581

Pendant les neuf années qui précèdent 1736 le nombre annuel des baptêmes était en moyenne de 18688, celui des mariages de 4112, des décès de 17804 et des enfants trouvés de 2471. Par conséquent à cette époque le nombre des décès à Paris était à celui des décès à Amsterdam, comme 30 est à 13. Eu égard au nombre des habitants de ces deux villes, on peut dire que le nombre des mariages à Paris est plus petit qu'à Amsterdam. Dans cette dernière ville 5001 couples se sont mariés en 1736 et 1737, et pendant les 7 années précédentes, 2788 couples par an, en moyenne. M. MAITLAND estime qu'il y a 437478 personnes à Paris. Les nombres de PETTY et d'AUZOUT ne seraient-ils pas

plus proches du nombre véritable? Il semble que, pour avoir le nombre des habitants, il faille multiplier par 24 celui des naissances.

En 1698 dans l'ensemble des domaines du prince électeur de Brandebourg il y a eu 67763 baptêmes, 18298 mariages et 44678 enterrements 1). Mais plus tard d'autres pays ont été ajoutés à ces domaines, de sorte que pendant les quatre années suivantes dans tout le royaume de Prusse les nombres ont été les suivants:

An	Naissances	Mariages	Enterrements
1725	82393	19877	61586
1726	83396	20331	64745
1727	81553	20469	65236
1728	75970	22044	64936
Somme....	323312	82721	256503
Par an....	80828	20628	64126

M. MAITLAND tire cette conclusion de ses calculs, que dans tout le royaume de Prusse, il y a 1494488 personnes au plus 2). Si l'on veut se servir ici de la règle d'après laquelle le chiffre des habitants s'obtient en multipliant par 35 celui des naissances, règle qui permet suivant un certain auteur de trouver le nombre des personnes qui habitent toute la Hollande ou Amsterdam, Harlem ou la Haye, le chiffre de la population entière serait de 2828980. Mais comme le nombre des décès est si petit dans ce cas et que ce nombre diffère tant de celui des naissances, il me semble qu'en 1698 le nombre des naissances peut avoir été $\frac{1}{20}$ du nombre des habitants, et $\frac{1}{24}$ dans les quatre autres années; tandis que celui des décès était $\frac{1}{30}$ du nombre des habitants. S'il en est ainsi, le chiffre de la population, il y a 12 ans, doit avoir été de 1920000 environ.

M. MAITLAND pour évaluer la population de Ninive, pose en principe que, d'après notre manière de voir actuelle, les enfants constituent $\frac{3}{10}$ du nombre total des habitants d'une ville. Il fallait Ninive.

1 Philos. Trans. No. 261, p. 508. Ici il est parlé de baptêmes, plus loin 1725—1728) de naissances; cela ne me semble pas correct.

2) The History of London, p. 550.

cependant préciser davantage: le prophète JONAS parle d'enfants qui ne connaissaient pas encore la différence entre la droite et la gauche, c. à. d. de fort jeunes enfants. D'après la table de M. HALLEY, les enfants âgés de moins de 5 ans forment $\frac{1}{8}$ de la population ; ceux qui sont en-dessous de 15½ ans forment les $\frac{3}{10}$ de tous les habitants de la localité considérée. Or, les enfants de 7 à 15½ ans ne peuvent pas être comptés parmi ceux que mentionne le prophète JONAS; de sorte que M. MAITLAND prend pour le nombre des habitants de Ninive un nombre au moins deux fois plus petit que celui qui résulte des données du prophète. Il estime que le nombre des habitants de Ninive n'était que de 403000 et celui des habitants de Babylone de 487921 1).

Milan.

En 1726 on à compté la population à Milan; on y trouva 103000 personnes des deux sexes au-dessus de sept ans. M. MAITLAND y ajoute le nombre 47000 qu'il prend pour celui des enfants en-dessous de sept ans. Selon lui, il y aurait donc eu 150000 habitants de cette ville. D'après la table de M. HALLEY ce nombre doit avoir été inférieur à 123500, et selon la mienne il doit avoir été un peu plus grand que 122000.

Hambourg.

En 1714 les décès à Hambourg, d'après M. MAITLAND, ont été au nombre de 3000 environ. ERDMAN NEUMEISTER, curé de l'église ST. JACQUES à Hambourg, estime qu'en 1716 il y avait bien 240000 âmes dans cette ville 2). Mais ce nombre est trop grand. RICCIOLUS nous enseigne 3) qu'on a trouvé, à l'aide d'observations faites durant un grand nombre d'années, que le nombre annuel des naissances à Bologne est $\frac{1}{15}$ de celui de la population entière; ce qui me semble une trop grande fraction.

Nombres des baptêmes, des mariages et des décès en différentes villes.

Voici les rapports des nombres des baptêmes, des mariages et des décès pour différentes villes; quant aux chiffres d'Insterbourg, il y a en eux quelque chose que je ne comprends pas.

1) The History of London, p. 543.

2) Heilige Wochen Arbeit, p. 331. Hamb. 1724.

3) Dans sa Géographie, p. 681, Venise 1672.

An		Baptêmes	Mariages	Décès
1725	Venise	4836	—	4816
1717	Vienne	4242	—	6110
1725	»	4708	—	5865
1723	Copenhague	2604	701	1914
1720	Insterbourg, en Prusse	2386	336	1398
1721	»	2235	359	889
1722	»	2045	381	1013
1721	Berlin	2276	669	2426
—	Königsberg	1682	474	1402
—	Dantzig	1470	446	1579
1720—1737, en moyenne	Harlem	—	436	1587
1721	Neurembourg	1084	—	1063
1720	Brandebourg	936	213	576
1725	Francfort sur Main	731	—	843
—	Erfurt	659	188	612
1723	Lobau	226	—	171

On voit par ce qui précède qu'il y a encore beaucoup à découvrir sur cette matière et qu'il faudra faire encore un grand nombre d'observations plus nettes pour qu'on puisse trouver sans recensement le nombre des habitants d'une localité ou d'un pays.

Comparaison des nombres relatifs aux deux sexes.

Si l'on considère le nombre des naissances, on trouvera que dans ces contrées-ci le nombre des garçons baptisés surpasse celui des filles. A Londres on a noté ces nombres pendant 80 années successives; on a trouvé que pour 100 garçons baptisés, il y avait 99 filles au maximum et 89 au minimum 1). En 101 ans 657899 garçons et 619925 filles ont été baptisés à Londres, ce qui fait à-peu-près 52 contre 49. On pourrait objecter que peut-être en d'autres endroits la proportion de ces chiffres est tout autre. Entre 1717 et 1725 les nombres suivants de garçons et de filles ont été

1) NIEUWENTYD, Regt gebruik der Wereldbeschouwing (Véritable Usage des différentes manières d'envisager le Monde) p. 306 et 307. J'ai été fort étonné en trouvant en cet endroit, et de même dans les Trans. anglaises, No. 328, p. 190, les nombres suivants. En 1703 furent baptisés à Londres 7765 garçons et 7083 filles; en 1704, 6113 garçons seulement et 5738 filles, en 1705 au contraire 8366 garçons et 7779 filles Quelle raison pourrait-on donner de ces grandes différences? Cependant, le régistre de la mortalité de 1704 fait voir qu'en cette année 8153 garçons et 7742 filles ont été baptisés.

baptisés dans les villes mentionnées ci-dessous. La troisième colonne donne les nombres des filles qui devraient être baptisées, eu égard à ceux des garçons, si la règle d'après laquelle 49 filles sont baptisées contre 52 garçons était universelle.

	Garçons	Filles	Filles d'après la règle	Différences
Copenhague	2651	2439	2498	+ 49
Breslau	5105	4913	4811	— 102
Leipzig	1771	1657	1669	+ 12 1)
Dresde	4240	4046	3995	— 51
Vienne	2185	2057	2059	+ 2
Somme...	15952	15112	15032	— 80

On voit donc que les nombres relatifs des enfants des deux sexes nés dans ces villes correspondent à-peu-pres avec ceux obtenus à Londres. Depuis 1657 jusqu'à 1737 inclusivement 994656 hommes et 965298 femmes ont été enterrés à Londres 2); depuis 1628 jusqu'à 1661 inclusivement 209436 hommes et 190474 femmes dans cette même ville 3).

Les filles vivent plus longtemps que les garçons.

C'est par les régistres de Breslau, de 1717, que j'ai remarqué la première fois que les filles vivent en moyenne plus longtemps que les garçons, et cela de la manière suivante. Considérons 200 enfants nouveau-nés, à savoir 100 garçons et 100 filles. Il est certain qu'en général le nombre des filles qui atteignent l'âge de 10 ans est de beaucoup supérieur au nombre correspondant des garçons. Cela ressort des régistres des trois villes mentionnées ci-dessous. Les deux premières colonnes font voir qu'en-dessous de dix ans 100 garçons meurent contre 86 filles. Nous ne parlons que des enfants nés vivants. La troisième colonne donne les nombres des filles qui devraient être mortes suivant cette règle, étant donnés les nombres des garçons, et la quatrième colonne donne les différences entre ces nombres calculés et les nombres observés.

	Garçons	Filles	Filles d'après la règle	Différences
A Breslau sont morts en 8 ans	3090	2662	2657	— 5
A Dresde en 5 ans et à Leipzig en 6 ans	3705	3174	3180	+ 6

1) Phil. Trans. No. 380, 381, 400 et 409.

2) M. MAITLAND, Histoire de Londres, p. 541.

3) JOHN GRAUNT, Nat. & Pol. Obs. p. 44. Londres, 1662.

Les garçons sont plus exposés que les filles à naître morts.

Il paraît que dans ces contrées-ci les garçons sont plus exposés que les filles à mourir avant ou pendant la naissance: des 10590 enfants nés à Breslau en 8 ans, 350 garçons et 222 filles sont nés morts. Des 7945 enfants, nés en 5 ans à Dresde, 252 garçons et 182 filles sont nés morts. Parmi 5576 enfants, nés en 6 ans à Leipzig, les nombres des enfants nés morts étaient de 217 et de 161 respectivement. En prenant la moyenne des enfants nés à Breslau, à Dresde et à Leipzig, on voit que le nombre des garçons mort-nés y a été au nombre correspondant des filles environ comme 13 est à 9. Les écarts de cette règle sont donnés par le tableau suivant.

		Garçons	Filles	Filles d'après la règle	Différences
Breslau.....	Nés morts	350	222	242	+ 20
Dresde......	Nés morts	252	182	175	— 6
Leipzig.....	Nés morts	217	161	150	— 11

Sur 35 enfants nés à Breslau, 2 en moyenne naissent morts; à Leipzig 1 sur 14 ou 15; à Londres 1 seulement sur plus de 30.

Décès des enfants.

La table de la page 176 fait voir que parmi 100 enfants nés vivants, plus de 50 ou 51 meurent en-dessous de 10 ans. 1) D'autres données numériques m'ont également montré qu'en général la moitié des enfants atteignent l'âge de 10 ans. En 8 années 11508 personnes sont mortes à Breslau, parmi lesquelles 5752 enfants en-dessous de 10 ans. Les enfants mort-nés ne sont pas compris dans ce chiffre ni dans ceux qui suivent. En 1718 le nombre des enfants morts en-dessous de 10 ans a été le plus petit: il n'y en avait que 562 sur 1183 personnes enterrées. Voici les nombres des enfants morts dans quelques villes allemandes; je n'ai pas considéré les années où la mortalité a été extraordinaire.

Leipzig			Dresde			Autres villes			
An	Décès	Enfants morts	An	Décès	Enfants morts	An		Décès	Enfants morts
1722	923	464	1723	1554	947	1722	Neurembourg	1045	513
1723	861	469	1724	1663	1030	1721	Ratisbonne	220	108
1724	900	531	1725	1556	790	1725	,,	213	108
1725	738	380				1720	Ville de Joh. Geor.	243	120

1 Attendu qu'à Londres le nombre annuel des décès surpasse celui des naissances il paraît que de 100 enfants nés vivants 47 seulement atteignent l'âge de 10 ans.

Maladies diverses. Les régistres anglais de la mortalité permettent de déterminer quelle est la partie des hommes qui meurent de différentes maladies. Les fièvres, la petite vérole et les spasmes font mourir plus de la moitié des hommes; mais les deux premières maladies sévissent fort inégalement. Les chiffres que je possède font voir qu'à Londres pendant 49 années la petite vérole a fait le plus grand nombre de victimes (127 sur 1000 décès) en 1710, et le plus petit nombre (7 sur 1000) en 1684; en moyenne $\frac{1}{14}$ des décès est dû à cette maladie. En 21 ans, entre 1702 et 1734, $\frac{1}{181}$ des décès était dû à la rougeole, en moyenne. En 1704 il y en avait beaucoup moins, 1 sur 1890; mais en 1733, 1 sur 48; c'est là la plus grande fraction atteinte pendant la période en question. Sur 83 personnes 3 sont mortes d'hydropisie. Sur 110 femmes accouchées une environ est morte. Sur 70 ou 71 enfants baptisés, il y avait en général une paire de jumeaux. A Harlem, en prenant la moyenne de 33 ans, ou compte une paire de jumeaux sur 76 enfants baptisés. Il me surprend que pendant les quatre années 1702—1706 le nombre des décès dus à la colique a été $3\frac{1}{2}$ fois plus nombreux que pendant les années 1731—1734. Il se peut que dans la première de ces deux périodes on ait compris d'autres maladies sous le même nom. Ou faut-il expliquer la différence par la diversité de la composition de l'atmosphère? Ou bien l'art de guérir cette maladie a-t-elle fait de si grand progrès?

Enfants naturels. Les enfants naturels forment à Berlin $\frac{1}{10}$ environ du nombre des enfants baptisés, et dans tout le domaine du roi de Prusse environ $\frac{2}{35}$. A Dresde, en 1721 et 1723 les enfants naturels formaient un peu plus de $\frac{1}{15}$ de ce nombre; mais en 1724 et en 1725 les moeurs y paraissent être devenus moins sévères, car alors ladite fraction était devenue $\frac{1}{11}$.

Pour mieux connaître l'état du genre humain, on devrait savoir combien de mariages réguliers il y a en chaque localité et en chaque pays, combien de célibataires, etc. En Allemagne, en beaucoup de localités, on a coutume de mentionner séparément les décès des mariés et des célibataires: à Breslau par exemple pendant 8 ans ces nombres ont été les suivants.

An	Hommes mariés	Femmes mariées	Veufs et Veuves	Célibataires	Demoiselles	Enfants en-dessous de 10 ans	Nombre total des décès
1717	226	144	157	60	57	816	1460
1718	238	141	122	60	60	562	1183
1720	385	186	285	113	113	645	1727
1721	301	157	208	92	82	572	1412
1722	231	149	150	57	52	1069	1708
1723	220	118	150	48	46	675	1257
1724	231	148	154	57	66	743	1399
1725	259	153	158	64	58	670	1362
	2091	1196	1384	551	534	5752	11508

Pendant 8 ans à Breslau 3287 mariages ont été dissous par la mort d'un des deux époux, ce qui fait 411 par an, en moyenne. A leur place en 6 ans (car je ne trouve pas le nombre des mariages en 1717 et 1718) 2460 couples ont été mariés, ce qui fait en moyenne 410 par an. Ce nombre est à-peu-près égal à celui des mariages dissous. Serait-il permis de conclure que dans une localité où le nombre des habitants reste stationnaire, le nombre des couples qui se marient annuellement égale en moyenne celui des mariages dissous? Si le premier nombre surpassait chaque fois le second, il paraît bien qu'une telle localité devrait devenir de plus en plus populeuse, et que dans le cas contraire le nombre de ses habitants devrait continuellement baisser. Les nombres des décès à Dresde ont été pendant 5 années les suivants:

An	Hommes mariés	Femmes mariées	Veufs	Veuves	Céliba-taires	Demoi-selles	Enfants	Nombre total des décès
1720	255	182	52	189	88	84	811	1661
1721	274	206	42	238 [1]	128	93	879	1860
1723	165	136	36	138	68	64	947	1554
1724	161	151	35	143	72	71	1030	1663
1725	225	174	36	65	99	167	790	1556
	1080	849	201	773	455	479	4457	8294

Pendant les cinq années en question 2100 mariages ont été conclus à Dresde, et 1929 mariages seulement ont été dissous par la mort; mais le nombre des années est un peu trop petit

1) On trouve ce nombre dans les Phil. Trans. No. 381, p. 30. Je pense toutefois qu'il faut lire 150 au lieu de 238; si non l'addition donnée dans cette Trans. est incorrecte (Note de l'auteur).

Dans le texte les additions ont été faites avec le nombre 238 (N. d. tr.).

pour que nous puissions en tirer une conclusion certaine. Il paraît que le nombre des mariages diffère beaucoup d'une année à l'autre: en 1724, 413 mariages ont été conclus, et 519 en 1725. En 1721 il paraît y avoir eu une grande mortalité parmi les célibataires et en 1725 parmi les demoiselles. Les nombres des décès à Vienne ont été les suivants pendant trois ans

Année	1722	1723	1724
Hommes	1038	1079	1007
Femmes	942	974	933
Garçons	1551	1758	1865
Filles	1438	1632	1560
Somme	4969	5443	5865

En 1724 il paraît y avoir eu une grande mortalité parmi les femmes.

Inégalité du nombre des décès.

Si l'on veut calculer les taux des rentes viagères d'après les régistres de la mortalité des villes dont le nombre des habitants augmente rapidement telles que Londres, il faut se procurer les données nécessaires pour éliminer l'accroissement résultant de l'immigration qui a lieu continuellement. A Londres il meurt en général trois fois plus de monde entre 30 et 40 qu'entre 10 et 20 ans. Ce rapport n'est pas si grand pour toute l'humanité: la raison de cette différence est que le rapport du nombre des personnes vivantes de la première catégorie à celui des personnes de la deuxième catégorie est plus grand à Londres que dans les localités où le nombre des habitants demeure stationnaire et où il n'y a pas d'immigration.

Les deux sexes à Bologne.

RICCIOLUS raconte qu'en Espagne il naît plus de filles que de garçons, mais que le contraire a lieu en d'autres pays, et qu'aux environs de Bologne, le pays où il demeurait, les deux nombres sont égaux. Il ajoute qu'en 1654 on a compté dans la ville de Bologne 26948 hommes et 29235 femmes, tandis que en 1657 il y avait 26991 hommes et 30432 femmes. Il ne semble que ce ne sont pas là des nombres fantaisistes: l'auteur était professeur à l'université de cette ville. Si l'on suppose que ses nombres ne méritent pas confiance, il faut songer qu'il se serait rendu méprisable auprès de ses collègues et d'autres habitants de la ville, attendu que probablement ces chiffres ne seront pas restés inconnus à beaucoup d'entre eux. Le même auteur raconte aussi 1) qu'en cette dernière année on comptait à la campagne autour de Bologne 76996 hommes et 90815 femmes: ici la différence des

nombres des deux sexes est encore plus considérable. En 1656 et 1657 il y a eu une peste en Italie qui venait de la Sardaigne et qui a enlevé 2) beaucoup d'habitants à Rome, à Gênes et à Naples; on peut supposer que cette peste ait sévi aussi à la campagne autour de Bologne, mais je ne suis pas en état d'affirmer que le nombre des hommes morts de cette épidémie a été supérieur à celui des femmes.

Rapports des nombres des adhérents de divers cultes à Amsterdam.

Pour faire connaître à-peu-près les rapports des nombres des adhérents des divers cultes à Amsterdam, on m'a fourni à ma demande les chiffres des baptêmes qui ont eu lieu dans toutes les églises réformées de cette ville en 1736 et 1737.

	An 1736	An 1737
Dans la Vieille Eglise (Oude Kerk)	439	437
„ „ Nouvelle Eglise (Nieuwe Kerk)	891	915
„ l'Eglise du Nord (Noorder Kerk)	652	576
„ „ de l'Est (Ooster Kerk)	107	102
„ „ du Sud (Zuider Kerk)	515	473
„ „ de l'Ouest (Wester Kerk)	750	790
„ „ de l'Amstel (Amstel Kerk)	221	222
„ „ de l'Ile (Eilands Kerk)	8	46
„ la Chapelle „Oudezijds" (Oudezijds Kapel) ..	14	18
„ „ „ „Nieuwezijds" (Nieuwezijds Kapel)	91	105
„ „ grande Eglise wallonne (Groote Walen Kerk)	115	117
„ „ petite „ „ (Kleine „ „)	53	31
„ l'Eglise anglaise (Engelsche Kerk, Begijnhof)	1	0
Somme....	3857	3832

Dans la Vieille Eglise 219 garçons et 220 filles ont été baptisés en 1736, et l'année suivante 223 garçons et 214 filles. La raison du petit nombre de baptêmes dans l'Eglise de l'Ile en 1736 doit être cherchée dans une reconstruction de cette église à cause de laquelle on n'y a pas prêché pendant quelque temps. Depuis 1732 jusqu'à 1737 inclusivement, 8319 enfants et 16 adultes ont été baptisés chez les luthériens; ce qui fait en moyenne 1386 enfants par an. Chez les remonstrants, en 1736 et 1737, 53 enfants en tout, c. à. d. 26 ou 27 par an. Chez les Mennonites flamands et les M. du Waterland, en 28 années (1710—1737), 1486 adultes ont été baptisés, c. à. d. 53 par an en moyenne. Le nombre des

1 Ricciolus, Géographie, p. 678.

2 Ricciolus, Chronol., p. 319.

membres est de plus de 1600. Chez les Mennonites du Soleil on a baptisé 13 personnes en 1736 et 21 en 1737. Chez les frisons en 8 années (1730—1737), 34 personnes. En y ajoutant encore 6 personnes (eu égard à ceux qui prennent un bain complet, ou qui ne se laissent pas baptiser du tout, et à ceux de Dantzig), on voit que le nombre des nouveaux membres mennonites est de 80 par an. On peut donc admettre que le nombre total des adhérents de ce culte est de 4800 à-peu-près, et qu'ils ont environ 175 enfants par an. Je passe les Quakers et ceux qui baptisent eux-mêmes leurs enfants, ceux de l'église anglaise épiscopale, et ceux de l'église arménienne, attendu que toutes ces communautés sont fort petites et que le nombre annuel des naissances y est par conséquent très-faible. Depuis 1734 jusqu'à 1737 inclusivement, 1217 juifs allemands et polonais ont été enterrés à Muiderberg et 114 à Zeeburg, c. à. d. 1331 en tout, ou 332 par an en moyenne. Des deux dernières années (dans les deux premières la petite vérole règnait parmi eux) je conclus qu'ils forment environ $\frac{1}{27}$ de la population entière d'Amsterdam. Les juifs portuguais sont aux juifs allemands et polonais dans un rapport de 3 à 8. Les catholiques célèbrent leurs cultes en différents endroits à Amsterdam; parmi ceux-ci il y en a trois ou quatre où l'affluence est grande. Si l'on savait combien d'enfants catholiques naissent ou sont baptisés annuellement, ou seulement quel est le nombre des décès, on connaîtrait à-peu-près les rapports des adhérents des divers cultes à Amsterdam. On voit que le nombre des enfants qui y naissent annuellement, les catholiques exceptés, et qui vivent jusqu'à l'âge où l'on a coutume de les baptiser chez les réformés et les luthériens, est de 5900 à-peu-près. Le nombre des enfants nés vivants doit être plus grand encore, attendu que beaucoup d'enfants meurent avant d'avoir atteint l'âge où l'on baptise dans les communautés nommées. Autant de fois qu'on trouve 100 réformés dans la ville, les nombres des adhérents des autres cultes, les catholiques exceptés, seront tels que l'indique le tableau suivant 1) construit uniquement d'après les chiffres précédents:

1) Le chiffre des luthériens peut être trouvé en multipliant par un certain nombre celui des enfants nés dans cette communauté; mais ce nombre ne devrait-il pas être plus petit que le nombre correspondant dont on se sert pour calculer le chiffre des réformés? (Note de l'auteur).

Rien ne fait voir quelle raison l'auteur avait de se poser cette question. (N. d. tr.).

Réformés		100
Luthériens		36
Mennonites, Remonstrants, etc.	plus de	5
Juifs portuguais	plus de	3
Juifs allemands et polonais....	moins de	9

On voit par là qu'il n'est guère possible de trouver les rapports entre le nombre des catholiques et celui des adhérents des autres cultes en partant des chiffres relatifs aux mariages. En effet, en 6 années, depuis 1732 jusqu'à 1737 inclusivement, 10077 couples ont été mariés dans les églises réformées à Amsterdam, et 5451 à l'hôtel de ville, donc en moyenne 1680 couples par an dans les églises réformées et 908 couples à l'hôtel de ville. Pendant les mêmes six années, 302 mariages ont été conclus annuellement, en moyenne, dans l'église luthérienne; nombre qui ne s'accorde nullement avec celui des mariages conclus dans l'église réformée, eu égard aux nombres des baptêmes qui ont lieu dans les deux églises. Cette différence provient toutefois en partie de ce que beaucoup de luthériens se marient seulement à l'hôtel de ville, et non pas dans l'église luthérienne.

Comment les registres pourraient être rendus plus instructifs.

On pourrait proposer diverses méthodes aisées à appliquer pour tenir des régistres plus instructifs. Mais comme elles ne conviennent pas toutes également bien à différentes localités, je n'en ferai connaître qu'une seule qui peut être utile aux princes lorsqu'ils désirent savoir si le nombre des habitants d'une ville (ou d'un pays) augmente ou diminue. Il faut compter d'abord le nombre des habitants et noter séparément ceux qui sont nés dans la ville même et ceux qui sont nés ailleurs. Ensuite il faut noter tous les ans le nombre des naissances et celui des décès, et parmi ces derniers il faut noter séparément ceux des étrangers. Supposons qu'on ait compté 22000 hommes dans une ville, parmi lesquels 2000 qui sont nés ailleurs, et qu'en 10 ans on y enterre 6340 indigènes et 1290 étrangers, tandisque le nombre des naissances est de 7872. Au bout de ce temps on compte de nouveau le nombre des habitants et l'on trouve 18760 indigènes et 1684 étrangers. Il s'ensuit que le nombre des habitants a diminué de 1556, que le nombre des naissances a surpassé celui des décès par 242, et qu'il y a eu 974 immigrants et 2772 émigrants.

Calcul des Rentes viagères.

Rentes viagères.

Il peut être fort utile en certains cas de connaître les lois de la mortalité du genre humain. Si l'on avait mieux connu ces lois dans les temps passés, le taux des rentes viagères aurait été moins élevé. En Angleterre, sous le roi GUILLAUME III, on donnait encore 14 % 1). Le Pensionnaire DE WIT affirme que la plupart des rentes viagères, payées par l'Etat en son temps, étaient au denier 9, c. à. d. à un taux de $11\frac{1}{9}$ %, quoique l'expérience — à en juger d'après quelques milliers de personnes dont il connaissait la mortalité d'après certains régistres des états — lui eût fait voir que, l'intérêt étant de 4 %, le taux des rentes viagères eût dû être inférieur à 1 sur 16, ou à $6\frac{1}{4}$ %, et que pour de jeunes personnes il n'eût pas fallu donner plus de 1 sur 18 ou $5\frac{5}{9}$ %. Tous ceux qui sont versés dans cet art, savent que le calcul des rentes viagères a toujours été laborieux. Quelle tablature les deux comptables des Etats de Hollande doivent avoir eu pour faire les calculs d'après la méthode du Pensionnaire! S'ils voulaient arriver à des solutions tant soit peu exactes, ils devaient se servir de grands nombres et faire des multiplications difficiles et de grandes additions 2). Le problème proposé était le suivant. Supposons que durant 99 semestres on doive payer tous les six mois la même somme, p. e. un florin; la même somme durant 98 semestres à un autre; de même à un troisième durant 97, à un quatrième durant 96 semestres et ainsi de suite jusqu'à 1, et qu'on demande quel est le montant de toutes ces sommes en argent comptant, le taux de l'intérêt annuel étant de 4 %. Pour calculer l'intérêt pendant un semestre on prend la moyenne géométrique. Posons $100 = a$, $4 = b$; alors $104 = a + b$. Posons en outre $p = 99$, $\sqrt{\frac{a}{a+b}} = r$, $\frac{r}{1-r} = s$. Je trouve que la somme comptante doit être $s\,.\,\overline{p - s + r^p s}$. En se servant alors de logarithmes, on évite tout ce long travail de la manière suivante. On a $r = 0{,}98058068$, donc $1 - r = 0{,}01941932$. Le logarithme de r est $-0{,}008517$.

Retranchez-en le logarithme de $1 - r$, c.à.d. le nombre $-1{,}711766$.

1) Phil. Trans. No. 196, p. 604.

2) „La Valeur des Rentes viagères par rapport aux rentes amortissables", par J. DE WIT, p. 12—16, la Haye 1671.

Vous trouvez ainsi le logarithme de s, c. à. d. le nombre + 1,703249; d'où résulte $s = 50,4951$.

$$\text{Log. } \frac{100}{104} = -0,017033\tfrac{1}{3}$$

(: 2)

$$r = -0,008516\tfrac{2}{3}$$

(mult. par 99 p)

$$\text{Log. } r^p = -0,843150$$

$$\text{Log. } s = +1,703239$$

(a d d.)

$$+0,860099$$

$$r^p s = 7,2460$$

$$p = 99$$

$$r^p s = 7,2460$$

$$p + r^p s = 106,2460$$

$$s = 50,4951$$

$$p - s + r^p s = 55,7509$$

Le log. de ce nombre est 1,746252

$$\text{Log. } s = 1,703249$$

$$3,449501$$

Le résultat demandé est $2815 \frac{147}{1000}$ florins, ce qui s'accorde avec la somme trouvée par les deux comptables.

Pour que cette méthode puisse servir aussi lorsqu'on veut faire le calcul d'une tontine, où les personnes qui appartiennent à certaines classes et qui vivent le plus longtemps reçoivent des payements égaux, j'ai inventé une manière facile de l'appliquer. Tontine.

Supposons que l'on doive payer à une classe 20000 florins annuellement, durant 80 ans ; à une autre la même somme durant 70 ans; et ainsi de suite jusqu'à 20 ans, et qu'on demande la valeur comptante de cette dette, le taux de l'intérêt composé étant de $2\frac{1}{2}$ %.

Posons $100 = a$, $2\frac{1}{2} = b$, $20000 = c$, $80 = d$; les nombres d'années successives forment une progression arithmétique, avec la raison e, où $e = 10$. Le nombre des différentes classes auxquelles nous devons payer est $p = 7$ dans ce problème. Soit x la somme comptante demandée. Soit en outre $\frac{a^d}{\overline{a+b}^{\,d}} = r$, $\frac{\overline{a+b}^{\,e}}{a^e} = t$ et $t^p = s$. Je trouve alors pour la valeur de x

$$x = \overline{p - \frac{s-1}{t-1}\, r}\, .\, \frac{ac}{b}.$$

A l'aide de logarithmes on trouve aisément que la somme comptante est de 3764828 florins et 16 sous. En faisant le calcul relatif à une tontine, il faut avoir égard au nombre des personnes qui forment une classe, parce qu'une tontine de peu de personnes ne durera probablement pas aussi longtemps qu'une tontine d'un grand nombre de personnes.

La règle précédente est également applicable au problème du Pensionnaire DE WIT. Si l'on suppose que le taux de l'intérêt est de 2 % par semestre, on aura $p = 99$, $a = 100$, $b = 2$, $a + b = 102$. Soit $c = 1000$. En ce cas $e = 1$, $d = p$. $\frac{a-b}{a} = t$, $t - 1 = \frac{b}{a}$

$r = \frac{ap}{a+b} - p$, et la somme cherchée est exprimée par $\overline{bp - a + ar.}\,\frac{ac}{bb}$.

A l'aide de logarithmes on trouve $ar = 14{,}0794$. Il s'ensuit que la somme cherchée doit être 2801985.

Ce qui précède permet aussi de résoudre le problème suivant.

Supposons qu'un certain capital soit placé à un intérêt annuel de 4 %, mais que tous les ans on doive retirer 7 % du capital, et la dernière année 2 %. On demande quelle somme celui qui achète ce capital immédiatement après la validation du contrat, devra payer pour obtenir pendant le même temps un intérêt de 3 %.

Méthode de calculer les rentes viagères.

On peut calculer les rentes viagères de diverses manières. La méthode suivante est longue, mais elle me semble simple et facile à comprendre. Je suppose que le but d'une société soit de vendre des assurances sur la vie à 1000 personnes âgées de 30 ans, de telle manière que la société paye un intérêt de $2\frac{1}{2}$ % de l'argent reçu. On dispose de régistres permettant de voir exactement quelle est en chaque année la mortalité parmi les personnes assurées. Si 976 personnes vivent encore après la première année, augmentez ce nombre de $\frac{1}{40}$ à cause de l'intérêt; ajoutez à la somme le nombre des personnes qui vivent encore après deux ans; augmentez ce nombre de nouveau de $\frac{1}{40}$; ajoutez-y ensuite le nombre de ceux qui vivent encore après trois ans, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes ces personnes sont décédées. J'appellerai A le résultat final. Multipliez ensuite le nombre 1000 par 100 florins; vous trouverez 100000 florins. Cherchez à l'aide de logarithmes ce que devient ce capital, si l'on prend un intérêt composé de $2\frac{1}{2}$ % pendant toutes les années comprises entre celle où furent vendues les assurances jusqu'à celle où la dernière personne est morte. Divisez le résultat par le nombre A; vous trouverez ainsi quel est le taux des rentes viagères qu'il faut payer à des personnes de 30 ans. J'ai calculé d'après la table désignée ci-devant

par le N°. 2. que si la société veut donner un intérêt de 4 %, le taux des rentes viagères pour une personne de dix ans devra être tant soit peu inférieur à $5\frac{1}{2}$ %. Il s'ensuit que notre théorie s'accorde fort bien avec le résultat de l'expérience du Pensionnaire DE WIT.

Si quelqu'un estime cette méthode trop longue qu'il sache qu'on peut la simplifier de différentes façons. On peut prendre une moyenne des décès pendant quelques années consécutives, et une nouvelle moyenne lorsque le rapport du nombre des décès à celui des personnes restées vivantes augmente considérablement. Soit a le nombre des personnes qui vivent encore un an après la vente des rentes viagères, $\frac{100}{i}$ le taux de l'intérêt, q le nombre d'années choisi, r le nombre moyen des décès annuels pendant le temps considéré, $\frac{p-1}{p} = c$, et $cp + q - 1 = h$. Une partie du nombre A dont nous avons parlé plus haut, à savoir la partie qui se rapporte aux années considérées, est alors exprimée par $ap - ppr.\, c^q + rh - a.\, p$. Les mathématiciens verront aisément quelle est la grandeur du nombre q qu'il faut prendre pour trouver un nombre A qui permette de calculer le taux des rentes viagères. Agissez ensuite de la manière suivante. Autre méthode.

Ajoutez au capital pour lequel on a vendu des assurances sur la vie, l'intérêt annuel composé pendant le nombre considéré d'années (ce qui se fait à l'aide de logarithmes). En divisant ce résultat par celui que donne la dernière formule, vous trouverez à-peu-près la rente viagère. Mais si l'on désire une valeur plus approchée, on peut se servir ensuite de la formule suivante.

$$B + bp - rpp.\, c^q - bp + hpr.$$

Par le nombre B je désigne la formule précédente ou la partie trouvée du nombre A; b est le nombre des personnes qui reçoivent encore la rente viagère après un an. J'appelle q le nombre d'années qu'on choisit maintenant pour la deuxième fois; la mortalité annuelle moyenne pendant ce nombre d'années est r; le reste comme plus haut. En opérant ensuite de la même manière qu'auparavant, on trouvera une valeur fort approchée des rentes viagères. Même on pourrait, si cela était nécessaire, se servir encore une fois (ou plusieurs fois) de cette dernière formule; mais il est inutile de calculer les rentes viagères si exactement parce

que la mortalité ne suit pas toujours les mêmes lois. Pour ne pas être trop long, je n'indiquerai pas la valeur de q qu'il faut prendre la deuxième fois, et je m'abstiendrai de diverses observations.

Pour mieux expliquer ceci, posons x = le taux annuel des rentes viagères. Soit 10000x la somme totale que les différentes personnes ont reçue (rentes viagères et intérêts) depuis quelques années. Je prends un intérêt de 10 %. Les personnes qui recevront encore des rentes viagères l'année suivante sont au nombre de 3000; il en meurt 100 par an pendant quatre années consécutives. Alors 10000 = a, b = 3000, r = 100, p = 10, $c = \frac{11}{10}$ et q = 4. Le calcul arithmétique d'après la première méthode, et le calcul suivant la formule, sont alors les suivants. Ils paraissent exiger à-peu-près le même travail; mais lorsque le nombre d'années est grand et que le taux de l'intérêt est exprimé par de grandes fractions, l'application de la formule est plus aisée, parce qu'on peut en l'employant se servir de logarithmes.

a =	10000	b = 3000	cp = 11
$\frac{1}{10}$ partie =	1000	rp = 1000	q — 1 = 3
	3000	b — rp = 2000	pc + q — 1 = 14
Après 1 an	14000	p = 10	pr = 1000
$\frac{1}{10}$ partie	1400	bp — rpp = 20000	pc+q — 1 . pr = 14000
	2900	a = 10000	— bp = — 30000
Après 2 ans	18300	a + bp — rpp = 30000	— 16000
$\frac{1}{10}$ partie	1830	$c^q = \frac{14641}{10000}$	
	2800	a + bp — rpp . c^q = 43923	
Après 3 ans	22930	— 16000	
$\frac{1}{10}$ partie	2293	27923,	le résultat demandé calculé
	2700		d'après la formule.
Après 4 ans	27923		

Si l'on construit une table donnant les rentes viagères, pour tous les âges de dix en dix ans, d'abord sans intérêt, puis à un intérêt de 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5 ou 6 %, et si l'on prend une table de la mortalité telle que la table No. 2, dont nous avons parlé ci-devant, on verra la grande ressemblance qu'il y a entre les rentes viagères et l'intérêt, ressemblance telle que dès qu'on a calculé quelques rentes viagères, à des taux d'intérêt différents, on trouve de suite et presque sans calculs (quel que soit le nombre

d'années ou quel que soit le taux de l'intérêt), quel doit être le taux des rentes viagères.

J'ai trouvé autrefois la règle suivante. Supposons que le capital d'une personne que j'appelle A, soit placé à intérêt composé, par exemple 1000 florins à 3 % par an; et qu'en même temps une deuxième personne B cède son capital qui est de 1000 florins également, à condition de recevoir, lui et ses descendants, une rente annuelle de $3 \frac{1}{85000000}$ %. Les rentes viagères reçues sont mises à un intérêt composé de 3 %. Après quelque temps on trouve que A et B possèdent le même capital. Pour trouver la grandeur de ce capital on n'a qu'à appliquer la règle suivante: retrancher le taux de l'intérêt annuel de celui des rentes viagères, et diviser ce dernier par la différence trouvée. Le quotient a ici la valeur 255000001. En multipliant ce nombre par 1000, on trouve la grandeur des deux capitaux. En se servant de logarithmes, on trouve que le nombre d'années est de 655. Mais si l'on ne dispose pas d'une table de logarithmes et qu'on veut néanmoins calculer approximativement le nombre d'années, il faut diviser le nombre qui exprime l'augmentation du capital en groupes de trois chiffres de droite à gauche. On obtient ainsi 255 | 000 | 001. Multipliez ensuite par 10 le nombre des traits qui ont servi à partager en groupes le nombre en question, ce qui donne 20. Elevez 2 à une puissance telle qu'on trouve à-peu-près le nombre exprimé par le premier groupe de chiffres (à gauche). C'est 2^8 qu'il faut prendre ici. Ajoutez donc 8 à 20, ce qui donne 28. Multipliez 28 par $70\frac{1}{4}$, ce qui donne 1967. Divisez 1967 par 3 (le taux de l'intérêt). Vous trouvez ainsi $655\frac{2}{3}$; c'est là le nombre des années. Lorsque le taux de l'intérêt est peu élevé on peut prendre le nombre 70; s'il est de 5 %, le nombre 71; de 10 %, le nombre 72. La règle est la même quel que soit le taux de l'intérêt. Si, en élevant 2 à une puissance entière, on ne peut obtenir un nombre à-peu-près égal au premier groupe de chiffres, on doit prendre une fraction convenablement choisie.

Si l'on a placé à un intérêt composé de $4\frac{1}{3}$ % un capital de 1388 florins, et qu'après un certain laps de temps ce capital est devenu de 59128 florins et 16 sous, on demande pendant combien de temps ce capital a produit son intérêt. Le capital est devenu

$42\frac{3}{5}$ fois plus grand. En élevant 2 à diverses puissances, on voit que ce nombre est entre 2^5 et 2^6. Or, $2^{5\frac{1}{2}}$ ou $2^{\frac{11}{2}} = 45$. L'augmentation du capital est donc exprimée à-peu-près par le chiffre $2^{5\frac{7}{16}}$. Multipliez donc $70\frac{1}{2}$ par $5\frac{7}{16}$, et divisez le produit par le taux de l'intérêt $(4\frac{1}{3})$. Vous trouverez ainsi 88 années et 5 mois. Ce nombre est le même que celui qu'on trouve à l'aide de logarithmes.

Si l'on avait placé à un intérêt composé de 4 % un morceau d'argent d'un poids égal à $\frac{1}{1000000000}$ d'un pied cubique d'argent de la même espèce (mesure de Paris), morceau qui aurait environ la grandeur d'un grain de sable, combien d'années faudrait-il pour que l'on reçut, capital et intérêts, un morceau d'argent aussi grand que la terre tout entière? Si l'on prend pour diamètre de la terre une longueur de 39231564 pieds parisiens 1), la grandeur de la terre sera à celle du petit morceau d'argent, qu'on a placé à intérêt, comme 316 suivi de 29 autres chiffres est à 1. En y ajoutant encore l'intérêt produit en trois mois, on obtient un capital qui surpasse celui qu'on avait mis à intérêt (32 suivi de trente zéros) fois. Or $32 = 2^5$ et $\frac{30}{3} = 10$. Multipliez ce 10 par 10, ajoutez-y l'exposant 5, vous trouverez ainsi 105. Multipliez 105 par $70\frac{1}{2}$ et divisez le résultat par 4 (taux de l'intérêt); vous trouverez ainsi 1850 à-peu-près. C'est là le nombre d'années qu'il s'agissait de trouver.

Cette règle peut servir aussi pour nous faire savoir quelle sera à-peu-près la grandeur d'un capital qu'on a placé à intérêt composé, au bout d'un grand nombre d'années. Exemple: quelqu'un m'a demandé quel capital on posséderait au bout de 5662 ans si l'on plaçait à un intérêt composé de 4 % un seul écu. Je multiplie ce nombre d'années par 4, ce qui donne 22648; en divisant ce produit par $70\frac{1}{2}$, je trouve 321. En écartant le dernier chiffre, on a 32, ce qui multiplié par 3 donne 96. Le dernier chiffre étant 1, il en résulte que le premier chiffre du nombre cherché est 2, et que 96 autres chiffres le suivent. Ce nombre est trop grand pour qu'on puisse se le représenter. Si l'on voulait payer cette somme d'écus par un morceau d'argent cubique, de même valeur

1) Suite des Mémoires de Math. & de Phys. 1718, p. 302.

que l'argent de nos florins, ce morceau serait si grand que si un corps volait le long d'une des arêtes de ce cube avec une vitesse uniforme 1000 fois plus grande que celle d'un boulet de canon 1), ce corps serait loin de parcourir, en 100000 millions d'années, la cent-millième partie de l'arête du cube.

Age indéterminé.

On vend quelquefois des assurances sur la vie, l'âge étant indéterminé. Il s'agit alors de posséder un grand nombre de données relatives à des personnes déjà décédées; lesquelles permettent de voir de combien le nombre total diminue par les décès annuels. On m'a donné un régistre de 10000 personnes pour lesquelles on avait acheté des rentes viagères, faisant voir le nombre annuel des décès. De 40 à 44 ans le nombre annuel des décès était de 146; à 45 ans, 141; de 46 à 49 ans, 140 par an; de 50 à 53 ans, 132 par an; à 54 ans 131, de 55 à 58 ans, 122 par an, à 60 ans enfin 110 seulement. J'ai des raisons pour ne pas douter des nombres donnés; je crois cependant qu'en les tirant des livres des rentes viagères on n'a pas noté les nombres qui se rapportent à chaque année séparément. En effet il n'est pas croyable que pendant plusieurs années consécutives, le nombre des décès reste le même et qu'il diminue si rapidement tous les cinq ans. Il me semble que pour trouver plus rapidement les nombres en question, on a pris la moyenne des décès de 5 à 5 ans. La table suivante donne le nombre annuel des décès. Les premières colonnes indiquent le nombre des survivants de 5 à 5 ans.

Vies de 10000 Personnes.

Années	Reste	Décès	Années	Reste	Décès	Années	Reste	Décès
5	9337	663	35	5160	724	65	1193	548
10	8719	618	40	4440	726	70	725	468
15	8060	659	45	3710	730	75	360	365
20	7352	708	50	3009	701	80	127	233
25	6618	734	55	2350	659	85	25	102
30	5890	728	60	1741	609	90	0	25

Cette table donne une idée plus exacte des nombres des survivants que celle qu'on m'a donnée. En calculant, d'après cette table, quel doit être le taux des rentes viagères, en supposant une rente amortissable de $2\frac{1}{2}$ % par an, je trouve à-peu-près $4\frac{3}{4}$ %. Mais

1 Dans l'hypothèse que cette vitesse est de 600 pieds parisiens par seconde.

si l'on prend un intérêt de 4 %, le taux des rentes viagères sera de 6 %, ce qui s'accorde assez bien avec le nombre $\frac{100}{16}$, trouvé d'après l'expérience par le Pensionnaire DE WIT.

Calcul de la valeur comptante des payements.

On peut calculer les rentes viagères encore autrement. J'ai suivi entre autres une méthode, d'après laquelle l'argent des assurances qu'on reçoit est considéré comme devant être payé selon différentes classes et à des époques déterminées ; j'ai calculé la valeur comptante de cet argent, ce qui n'est pas difficile quoique les progressions ne soient ni arithmétiques ni géométriques, pourvu qu'on en connaisse la loi. On demande par exemple quelle est la valeur comptante, lorsque les payements sont représentés par tous les nombres cubes depuis l'unité jusqu'à n inclusivement. En prenant un intérêt composé, et en supposant que b florins à payer après un an valent au comptant a florins, je trouve la somme comptante par le calcul suivant.

$$\frac{ab}{\overline{b-a}^2} + \frac{6aabb}{\overline{b-a}^4} \left.\begin{matrix} - \dfrac{6aa}{\overline{b-a}^3} \times \overline{\dfrac{bb}{\overline{b-a}.a} + \dfrac{bn}{a}} \\ - \dfrac{6bn.\overline{n-1} + b - b\overline{-a}.n3}{\overline{b-a}^2} \end{matrix}\right\} \frac{a^{n+1}}{b^n}$$

En choisissant convenablement les nombres a et b, on peut faire que $b - a = 1$. La formule devient alors

$$ab + 6aabb - \frac{a^{n+1}}{b^n}.\ \overline{b + n^3 + ab + an + nn - n.6b},$$

ou, en posant $ab = p$,

$$p + 6pp - \frac{a^{n+1}}{b^n}.\ \overline{b + n^3} + 6p.\overline{b + n} + 6b.\overline{nn - n}.$$

En remplaçant a, b et n par des nombres, on peut aisément faire voir la validité de ces formules. Lorsque $n = 3$, $b = 11$, et $a = 10$, la somme comptante sera $27\frac{1073}{1331}$. Si le nombre donné des années est très-grand, et que le taux de l'intérêt renferme une grande fraction, on peut à l'aide de logarithmes trouver la réponse désirée avec peu de peine et sans erreur considérable ; ce qui serait à-peu-près impossible, si l'on voulait se servir seulement de l'arithmétique ordinaire. En posant n = l'infini et $\frac{ab}{\overline{b-a}^2} = p$,

on trouvera pour la somme comptante l'expression 6 pp + p. conformément au resultat du célèbre JACQUES BERNOULLI 1).

En prenant un intérêt composé de $2\frac{1}{2}$ %, on trouve que la valeur comptante de tous les payements, jusqu'à l'infini, est de 16139240 florins; celle des mille premiers payements est égale à cette même somme diminuée de 19 sous seulement. Si l'on prend un intérêt de 1 %, la valeur comptante de tous les payements, jusqu'à l'infini, est de 613 millions de florins; celle des derniers payements, de 1000 jusqu'à l'infini, est de 797789 florins.

A l'aide de ce qui précède, on peut aussi résoudre le problème suivant. Quelqu'un doit payer 1 florin au bout d'un an, 8 florins au bout de deux ans, 27 florins au bout de trois ans, 64 florins au bout de quatre ans et ainsi de suite (nombres cubes). On demande quel doit être le taux de l'intérêt composé, pour que la valeur comptante des 1000 premiers payements soit inférieure d'une tonne d'or à tous les payements suivants jusqu'à l'infini. La réponse doit être si exacte que l'erreur ne dépasse pas $\frac{1}{500.000}$ %. Réponse: $1\frac{283893}{716197}$ %.

On a imprimé à Amsterdam, en 1729, un „Calcul des Rentes viagères d'après la grandeur des Rentes amortissables" par ISAÄC DE GRAAF, qui est basé sur quelques hypothèses et où l'on n'a pas eu égard aux données exactes fournies par les régistres de la mortalité. La mortalité n'écoute pas nos suppositions; c'est par l'expérience qu'il faut la connaître, car sans elle on perd le fil. Considérons cependant la base sur laquelle l'auteur nommé construit sa théorie. Il exige qu'on accepte avec lui sans discussion les deux propositions suivantes, textuellement reproduites ici:

Le calcul des rentes viagères doit être basé sur l'expérience

I. „Que la force vitale de l'homme est la plus grande à l'époque de sa naissance;

II. „Que cette force vitale ou pouvoir de continuer à vivre s'épuise avec le temps, en diminuant d'une certaine quantité tous les six mois; cette diminution étant d'abord faible et presque insensible (quoique jamais nulle ou négative), puis plus grande après plusieurs années et surtout à la fin; de telle sorte que la diminution du semestre suivant, quelque petite ou quelque grande qu'elle puisse être, est toujours supérieure à celle du semestre précédent, jusqu'à

1) „De Seriebus Infinitis", p. 240, Basil. 1713.

ce que la force vitale est entièrement épuisée: c'est alors, et alors seulement, que finit la vie d'après notre hypothèse."

Mais comment peut-on accepter ces propositions sans aucune modification? Il s'ensuivrait qu'il est plus avantageux d'acheter des rentes viagères pour de jeunes enfants ou pour des enfants nouveau-nés que pour ceux qui ont déjà atteint l'âge de dix ans. Or, tout-le-monde sait que le contraire est vrai; car si l'on considère 100 enfants nouveau-nés, il ne s'en trouvera plus que 47 au bout de dix ans; tandisque de 100 enfants âgés de 10 ans, 93 vivent encore en général au bout de 10 ans.

Pour des personnes de 30 ans, le taux des rentes amortissables étant de 3 %, celui des rentes viagères sera de 6,34632 %, c. à. d. de plus de $6\frac{1}{3}$ %, d'après les calculs de cet auteur 1). Lorsqu'il s'agit de personnes de 50 ans, le taux des rentes amortissables étant le même, M. DE GRAAF trouve un taux de 7,91189 % pour les rentes viagères 2). Il cherche à trouver la mortalité d'après les résultats du Pensionnaire DE WIT. Mais, pour obtenir une table de la mortalité à laquelle l'on puisse se fier, il faut extraire des Livres des Rentes Viagères, les données relatives à un grand nombre de personnes déjà décédées; on doit noter l'âge qu'elles avaient en achetant une assurance sur la vie, et la durée de leur vie. En effet, il ne faut pas se fier à d'autres qui prétendent avoir obtenu leurs données de cette façon; ce ne sont là bien souvent que des hypothèses pures, comme l'expérience me l'a prouvé; je me fierais donc davantage à la table de la page 201 si j'étais assuré qu'on l'a véritablement tirée des régistres mortuaires.

Solution de quelques problèmes par les méthodes précédentes.

Les méthodes précédentes peuvent servir à l'examen de quelques projets. Supposons par exemple qu'on nous propose les conditions que je vais nommer. Nous pouvons examiner si elles sont acceptables en calculant le taux annuel de l'intérêt. La compagnie qui vend les assurances peut également s'en servir pour rejeter les projets suivant lesquels elle payerait un intérêt trop élevé.

On veut vendre des assurances sur la vie à des personnes âgées de 10 ans. Durant les 10 premières années on donnera un intérêt annuel de 4 %, durant les 10 années suivantes de 5 %, durant les 10 années suivantes de 6 %, etc. Le taux de l'intérêt augmente

1) Pag. 33.
2) Pag. 35.

de 1 % tous les dix ans. Si l'on suppose que la cinquième partie de l'argent reçu par la compagnie doit être versée dans le trésor public, quel sera le taux de l'intérêt annuel payé par elle?

On pose la même question en supposant qu'on ne payera rien durant les 10 premières années; durant les 10 années suivantes 4 %, durant les 10 années suivantes 8 %, puis 12 %, puis 16 % etc.: le taux de l'intérêt augmente de 4 % tous les dix ans. L'impôt à payer à l'Etat est le même que précédemment.

Pour des personnes âgées de 30 ans qui achètent des assurances sur la vie, on veut donner 3 % durant les 10 premières années, 6 % durant les 5 années suivantes, 9 % durant les 5 années suivantes, 12 % durant les 5 années suivantes, etc.: le taux augmente de 3 % tous les 5 ans. L'impôt est le même que précédemment. On pose la même question.

Même question, si l'on paye 5 % durant les 10 premières années, $6\frac{1}{2}$ % durant les 5 années suivantes, 8 % durant les 5 années suivantes, etc.: le taux augmente de $1\frac{1}{2}$ % tous les 5 ans.

Même question, si l'on veut vendre des assurances sur la vie à des enfants de deux ans (ou en-dessous de deux ans) qui ne commenceront qu'après 18 ans à recevoir leurs rentes, à savoir 10 % durant les 10 premières années, 11 % durant les 10 années suivantes, 12 % durant les 10 années suivantes, etc.: le taux augmente de 1 % tous les 10 ans. L'impôt est le même.

Même question, si dans le cas précédent on donne 7 % durant les 10 premières années; 11 % durant les 10 années suivantes; 15 % durant les 10 années suivantes et ainsi de suite: le taux augmente de 4 % tous les 10 ans.

Même question, si dans le cas précédent on suppose que les rentes viagères ne sont reçues que 28 ans après qu'on les a achetées; à savoir 10 % les 10 premières années, 20 % les 10 années suivantes, 30 % les 10 années suivantes, puis 40 %, etc.: le taux augmente de 10 % tous les 10 ans. L'impôt est le même.

Supposons que nous devions payer des rentes pendant 15 ans (on peut se figurer qu'il y a un contrat de survivance), à savoir 8 % durant les trois premières années, 9 % durant les trois années suivantes, puis 10 %, puis 11 %, et enfin 12 % pendant les trois dernières années. L'impôt est le même que précédem-

ment. On demande quel est le taux de l'intérêt payé par la compagnie qui reçoit l'argent.

Même question, si nous devons payer des rentes pendant 30 ans, à savoir 3 % durant les 5 premières années, 4 % durant les 5 années suivantes, 5 % durant les 5 années suivantes, 6 % durant les 10 années suivantes, et 7 % durant les dernières 5 années. L'impôt est le même.

Supposons qu'une société désire vendre des rentes viagères à des personnes quelconques, sans différence d'âge. La moitié des rentes de tous ceux qui meurent sera au profit de la société, et l'autre moitié à celui des survivants. Si l'on veut payer des rentes viagères annuelles de 5 % (la cinquième partie de l'argent étant versée dans le trésor public), quel sera le taux de l'intérêt payé par la société? Le nombre des décès est tiré des Livres sur les Rentes Viagères.

Les contrats de cette espèce présentent pour la société cet inconvénient que parmi un grand nombre de personnes il y en a souvent un qui atteint un âge extrêmement élevé; ce qui est pour elle un grand désavantage.

Je pourrais ajouter ici les solutions de ces problèmes qui ne sont ni longues ni difficiles. Je pourrais parler également des assurances achetées par deux ou plusieurs personnes. Mais je crains que cela ennuyerait le lecteur; c'est pourquoi je termine ici.

Le **Problème** suivant sert seulement pour remplir une page vide.

Un grand nombre de joueurs A, B, C, D, etc., $n + 1$ en tout, jouent avec des chances égales, aux conditions suivantes. A et B commencent, et mettent chacun une unité à l'enjeu. C remplace le vaincu et met la même somme à l'enjeu; il joue avec le vainqueur, et celui qui gagne alors doit jouer avec D qui met lui aussi la même somme à l'enjeu; et ainsi de suite. Lorsque tous ont eu leur tour, A joue de nouveau en faisant la même mise d'une unité. On continue de la même manière jusqu'à ce que quelqu'un a gagné la partie, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'il a vaincu successivement tous ses adversaires. On demande l'avantage ou le désavantage de chaque joueur.

Ce Problème est fort difficile. Je n'ai donné autrefois que la formule, sans indiquer comment on la trouve. Je ferai voir maintenant quelle a été ma méthode; mais pour ne pas trop m'étendre

je ne développerai qu'une partie des calculs et j'indiquerai où l'on peut trouver le reste. Le célèbre NICOLAS BERNOULLI, professeur à l'université de Petersbourg il n'y a pas longtemps, trouve que les chances de A ou de B pour gagner le jeu sont à celles de C comme $1 + 2^n$ est à 2^n 1). Posons pour simplifier $2^n = a$, $1 + 2^n = b$, $\frac{a}{b} = c$, donc $a = b\,c$. Si nous posons $d =$ le nombre des chances de A ou de B, celles de C seront $c\,d$, de D $c\,c\,d$, de E $c^3\,d$, et ainsi de suite. La somme de ces chances doit être égale à la certitude, donc à 1. Par conséquent

$$d + d + c\,d + c\,c\,d + c^3\,d + \text{etc. jusqu'à } c^{n-1}\,d = 1.$$

Les termes (le premier excepté) forment une progression géométrique; donc

$$1 + \frac{1 - c^n}{1 - c} = \frac{1}{d}.$$

En substituant de nouveau $\frac{a}{b}$ à c, on trouve

$$\frac{1}{d} = \frac{2\,b^n - a\,b^{n-1} - a^n}{b^{n-1}}$$

ou

$$d = \frac{2\,b^n - a\,b^{n-1} - a^n}{b^{n-1}}$$

Si nous appelons g le dénominateur de cette fraction, nous aurons $d = \frac{b^{n-1}}{g}$.

Appelons x l'avantage ou le désavantage de A ou de B, y celui de C, z celui de D, u celui de E, etc. On trouve alors, suivant le professeur nommé 2),

$$y = \frac{\overline{x + d}.a - n\,c\,d}{b}$$

$$z = \frac{\overline{y + c\,d}.a - n\,c\,c\,d}{b},$$

et ainsi de suite pour les autres grandeurs correspondantes.

Pour trouver maintenant la formule générale, j'agis comme suit. Dans la dernière équation remplacez de nouveau a par b c, ce qui donne

$$y = c\,x + d\,c - \frac{n\,c\,d}{b}$$

1) Philos. Trans. 1714, Octobre, Novembre et Décembre. No. 341, p. 134 et 135.

2) p. 138 et 139.

$$\text{ou} \qquad y = cx + \overline{1 - \tfrac{n}{b}}\,.\,cd,$$

$$z = cy - \overline{1 - \tfrac{n}{b}}\,.\,ccd,$$

$$u = cz + \overline{1 - \tfrac{n}{b}}\,.\,c^3 d.$$

Posons $\overline{1 - \frac{n}{b}}\,.\,cd = e$. Alors

$$\begin{array}{llll}
A & x = & x & = x \\
B & x = & x & = x \\
C & y = & cx + e & = cx + e \\
D & z = & cy + ec & = ccx + 2ce \\
E & u = & cz + cce & = c^3 x + 3cce \\
F & w = & cu + c^3 e & = c^4 x + 4c^3 e \\
 & & \text{etc.} & \quad \text{etc.}
\end{array}$$

Si r est le numéro d'ordre d'un joueur quelconque, donc $r = 0$ pour A et pour B, $r = 1$ pour C, $r = 2$ pour D, etc. l'avantage ou le désavantage d'un joueur quelconque peut être exprimé par

$$c^r x + r e c^{r-1}.$$

La somme de la première colonne est

$$x + x + cx + ccx + c^3 x + \text{etc.} \qquad (n+1) \text{ termes.}$$

Cette somme est $\frac{gx}{b^{n-1}}$ d'après ce qui précède. — La somme de la deuxième colonne se calcule de la manière suivante

$$\left.\begin{array}{r}
1 + c + cc + c^3 + c^4 + \text{etc.} \\
c + cc + c^3 + c^4 + \text{etc.} \\
cc + c^3 + c^4 + \text{etc.} \\
c^3 + c^4 + \text{etc.} \\
c^4 + \text{etc.} \\
\text{etc.}
\end{array}\right\} \text{jusqu'à } c^{n-2} = \left\{\begin{array}{c}
1 - c^{n-1} \\
c - c^{n-1} \\
cc - c^{n-1} \\
c^3 - c^{n-1} \\
c^4 - c^{n-1} \\
\text{etc.}
\end{array}\right\} \begin{array}{c}
\text{chaque} \\
\text{expres-} \\
\text{sion} \\
\text{étant} \\
\text{divisée} \\
\text{par } 1 - c.
\end{array}$$

La première somme est une progression géométrique; c'est pourquoi la somme des deux dernières colonnes prises simultanément est $\frac{1 - c^{n-1}}{\overline{1 - c}^2} - \frac{\overline{n - 1}\,.\,c^{n-1}}{1 - c}$. Remplacez alors c par $\frac{a}{b}$ et $1 - c$ par $\frac{1}{b}$ (qui lui est égal), vous trouverez

$$1 + 2c + 3cc + 4c^3 + 5c^4 + \text{etc. jusqu'à } \overline{n - 1}\,.\,c^{n-2} =$$

$$\frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{b^{n-3}} - \frac{\overline{n - 1}\,.\,a^{n-1}}{b^{n-2}}.$$

En multipliant la valeur de d trouvée ci-dessus par c ou $\frac{a}{b}$, on obtient $c\,d = \frac{a\,b^{n-2}}{g}$. En multipliant de nouveau par $1 - \frac{n}{b}$, on trouve $e = \frac{\overline{b-n}.a.b^{n-3}}{g}$. Multipliant encore par

$$\frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{b^{n-3}} - \frac{\overline{n-1}.a^{n-1}}{b^{n-2}},$$

on trouve

$$\frac{\overline{b-n}-a}{g}.\ \overline{b^{n-1} - a^{n-1} - \frac{n-1}{b}\,a^{n-1}}.$$

Si l'on y ajoute la valeur $\frac{gx}{b^{n-1}}$ de la première colonne, cette somme qui représente l'avantage ou le désavantage de tous les joueurs, doit être nulle. On trouve ainsi

$$x = \frac{b^{n-2}}{gg}.\ a.\ \overline{n-b}.\,\overline{b^n - ba^{n-1} - \overline{n-1}\,.\,a^{n-1}}.$$

En substituant dans la formule générale qui donne l'avantage ou le désavantage de chaque joueur, c. à. d. dans la formule $c^r\,x + rec^{r-1}$, la valeur trouvée de x, ainsi que les expressions

$$\left\{\begin{array}{l} e = \frac{\overline{b-n}.a.b^{n-3}}{g}, \\ g = 2b^n - ab^{n-1} - a^n, \\ c = \frac{a}{b}, \end{array}\right.$$

on trouve la formule suivante qui exprime l'avantage ou le désavantage d'un joueur quelconque:

$$\frac{b^{n-r-2}\,\overline{n-b}.a^r}{\overline{2b^n - ab^{n-1} - a^n}^2}\cdot \overline{\overline{a-2r}.b^n - a^n\,b + arb^{n-1} + \overline{r+1-n}.a^n}.$$

Supposons par exemple qu'il y ait 5 joueurs et qu'on veuille calculer l'avantage ou le désavantage du quatrième joueur D. On a alors $a = 16$, $b = 17$, $r = 2$, $n = 4$; le terme b^{n-r-2} est donc égal à 1; c'est pourquoi son avantage est exprimé par

$$\overline{4-17}.16^2.\ \frac{12.17^4 - 16^4.17 + 17^3.16.2 - 16^4}{\overline{2.17^4 - 16.17^3 - 16^4}^2} \text{ ou } \frac{-3328 - 20180}{\overline{22898}^2}$$

$$\text{ou } \frac{16789760}{131079601}.$$

Si l'on trouve +, c'est un avantage; si l'on trouve —, c'est un désavantage. Si l'on pose $r = 0$, l'avantage ou le désavantage des deux premiers joueurs, A et B, est toujours

$$\overline{n-b}\,.\,b^{n-2}\,\frac{ab^{n}-a^{n}b-\overline{n-1}\,.\,a^{n}}{\overline{2b^{n}-ab^{n-1}-a^{n}}^{\,2}}$$

et celui du dernier joueur

$$a^{r}\,.\,n-b\,.\,\frac{\overline{a-2r}\,.\,b^{n-1}-a^{n}+b^{n-2}ar}{\overline{2b^{n}-ab^{n-1}-a^{n}}^{\,2}}$$

Le calcul des chances peut être réduit à deux questions générales: la première est celle du nombre des chances dans le cas d'un tirage, la seconde celle des dédommagements qu'il faut donner aux joueurs qui laissent passer leur tour; les deux formules générales que j'ai inventées autrefois pour résoudre ces questions, se trouvent dans le Calcul des Chances. 1) La solution de presque tous les autres problèmes qu'on peut poser, résulte de ces deux formules. Supposons par exemple qu'il y ait q joueurs qui se proposent chacun de jeter avec quelques dés, pour gagner l'enjeu, un même nombre de points. A fera d'abord un coup, puis B en fera 2, C 3, D 4, etc. d'après une progression arithmétique. Lorsque tous auront jeté, A fera de nouveau 1 coup, puis B 2 coups, C 3 coups, etc., comme auparavant, jusqu'à ce que l'un ou l'autre gagne le jeu. Si b représente le nombre total des chances, c. à. d. des coups qu'on peut faire avec les dés, c les chances de gagner le jeu du premier coup, quelle sera la partie de l'enjeu à laquelle un joueur qui a le numéro d'ordre r a droit? Si l'on pose $\frac{b-c}{b} = a$, la formule 2) dont nous avons fait mention, fait voir que la part demandée du joueur sera

$$\frac{a^{\frac{1}{2}rr-\frac{1}{2}r}-a^{\frac{1}{2}rr+\frac{1}{2}r}}{1-a^{\frac{1}{2}qq+\frac{1}{2}q}}\,.$$

Que le nombre des joueurs soit aussi grand qu'il vous plaira, de sorte que r peut être un grand nombre, vous trouverez néanmoins facilement la solution à l'aide de logarithmes.

1) Calcul des chances par l'Algèbre, Problème I et Problème III.

2) ,, ,, ,, ,, , , p. 59.

APPENDICE

aux

„Hypothèses sur l'Etat de l'espèce humaine"

et au

„Calcul des Rentes viagères".

J'ai montré dans l'article précédent comment il faut déterminer les rentes viagères en considérant la mortalité du genre humain telle quelle est (sans distinction de sexe) d'après les écrits qui jusqu'à présent ont paru sur ce sujet, ou plutôt d'après ceux qui sont parvenus à ma connaissance. Je ferai suivre maintenant quelques tableaux faisant voir jusqu'à quel point l'expérience confirme ces calculs; ils ont été tirés des Livres sur les Rentes Viagères, en séparant les hommes et les femmes, ce qui est l'unique moyen pour parvenir à des résultats dignes de confiance.

Les rentes viagères d'après l'expérience.

D'après une résolution du 18 Juillet 1672, on a vendu à Amsterdam au comptant les assurances suivantes:

Vente d'assurances sur la vie.

De 1 à 20 ans	exclusivement	1000	florins, donnant une rente annuelle de fl. 100. 1)
„ 20 à 30 „		950	
„ 30 à 40 „		900	
„ 40 à 45 „		850	
„ 45 à 50 „		800	
„ 50 à 55 „		750	
„ 55 à 60 „		675	
„ 60 à 65 „		600	
„ 65 à 70 „		500	
„ 70 à 75 „		400	
„ 75 ans et au-dessus.		300	

1) Commelin „Description de la ville d'Amsterdam", 2ième Partie, p. 1205.

Deuxième vente.

D'après une autre résolution, du 18 Janvier 1673, on a de nouveau vendu au comptant les assurances suivantes

De 1 à 20 ans	exclusivement	1000	florins, donnant une rente annuelle de fl. 100. 1)
,, 20 à 30 ,,		950	
,, 30 à 40 ,,		900	
,, 40 à 45 ,,		850	
,, 45 ans et au-dessus.		800	

La première vente a eu lieu du 29 Juillet au 9 Septembre 1672; la deuxième du 20 Janvier au 28 Février 1674. On a vendu en tout 1698 assurances, à savoir 891 à des femmes, dont 443 en-dessous et 448 au-dessus de 20 ans; et 807 à des hommes, dont 461 en-dessous et 346 au-dessus de 20 ans. En 1738, 45 hommes et 55 femmes vivaient encore qui presque tous avaient été des enfants en-dessous de 10 ans à l'époque où leur vie fut assurée. Et quoique le nombre des garçons en-dessous de dix ans surpassât d'un quart celui des filles du même âge, on voit cependant qu'un plus grand nombre de ces dernières a survécu. Il paraît qu'en ce temps on préférait assurer des jeunes gens plutôt que des jeunes filles, ce qui est pourtant beaucoup plus avantageux pour les acheteurs. Les femmes en-dessous de 20 ans ont reçu en tout 18552 fois une rente annuelle, ce qui fait $41\frac{7}{8}$ pour chacune d'elles; et celles au-dessus de 20 ans en tout $10904\frac{1}{2}$ fois, ce qui fait $24\frac{1}{2}$ pour chacune d'elles. La moyenne pour toutes les femmes, jeunes et vieilles, est de 33 ans environ. Les 461 hommes en-dessous de 20 ans ont reçu leur rente pendant $38\frac{7}{8}$ ans en moyenne, et ceux au-dessus de 20 ans pendant $21\frac{3}{4}$ ans; ce qui fait une moyenne de $31\frac{3}{8}$ années pour tous les hommes, jeunes et vieux. Et pour toutes les personnes, hommes et femmes, jeunes et vieux, une moyenne de $32\frac{3}{8}$ années.

Troisième vente.

J'ai reçu en outre une liste de 163 assurances prises pour des hommes qui pour la plupart avaient déjà atteint un certain âge,

1) Commelin ,,Description de la ville d'Amsterdam'', 2ième Partie, p. 1205.

entre le dernier Janvier 1686 et le dernier Mars 1689; il n'y en avait parmi eux que deux en-dessous de 10 ans, dont un vit encore, et 14 entre 10 et 30 ans; de ces 163 hommes trois en tout vivaient encore en 1738. On m'a donné de plus une liste de 85 assurances, prises pour des femmes assez âgées pour la plupart entre le dernier Janvier 1686 et le 6 Octobre 1688. Parmi elles il n'y en avait pas une seule en-dessous de 10 ans, et 3 seulement en-dessous de 30 ans; deux vivaient encore en 1738.

Pour déterminer maintenant la durée de la vie pour les personnes des deux sexes, j'ai pris tous les chiffres contenus dans les Livres des Rentes Viagères, excepté ceux qui se rapportent aux 183 personnes dont je parlerai plus loin. Le nombre des hommes considérés est de 794, celui des femmes de 876. Tous ceux-ci ont reçu des rentes viagères. Je les ai divisés en classes de 5 à 5 ans, comme on peut le voir dans les deux tableaux suivants.

La vie de 794 hommes.

De 0 à ans	De 5 à 9 ans	De 10 à 14 ans	De 15 à 19 ans	De 20 à 24 ans	De 25 à 29 ans	De 30 à 34 ans	De 35 à 39 ans	De 40 à 44 ans	De 45 à 49 ans	De 50 à 54 ans	De 55 à 59 ans	De 60 à 64 ans	De 65 à 69 ans	De 70 à 74 ans	De 75 à 79 ans	De 80 à 84 ans	De 85 à 90 ans	De 90 à 94 ans	De 95 à 99 ans
100	95	91	87	78	68	64	58	50	41	36	27	18	15	8	4	2	1		
	110	107	106	98	95	89	80	65	62	52	33	22	16	12	6	3			
	205	198	193	176	163	153	138	115	103	88	60	40	31	20	10	5	1		
		108	104	97	90	84	79	73	59	50	41	28	16	11	5	3	1		
		306	297	273	253	237	217	188	162	138	101	68	47	31	15	8	2		
			68	67	63	56	51	49	44	33	21	13	8	6	2	1			
			365	340	316	293	268	237	206	171	122	81	55	37	17	9	2		
				65	61	56	52	44	37	31	24	18	14	9	4	2			
				405	377	347	320	281	243	202	146	99	69	46	21	11	2		
					50	49	46	43	34	30	27	20	15	11	6	3	1		
					427	396	366	324	277	232	173	199	84	57	27	14	3		
						48	45	40	34	30	23	17	11	9	6	4	2		
						444	411	364	311	262	196	136	95	66	33	18	5	1	
							26	23	18	18	13	13	11	5	3	2			
							437	387	329	280	209	149	106	71	36	20	5	1	
								53	52	44	31	21	16	11	5	4	3	1	
								440	381	324	240	170	122	82	41	24	8	2	
									52	48	36	31	21	12	4	2	1		
									433	372	276	201	143	94	45	26	9	2	
										43	36	29	20	15	10	7	4	1	
										415	312	230	163	109	55	33	13	3	
											20	19	12	9	6	2			
											332	249	175	118	61	35	13	3	
												16	16	10	6	2			
												265	191	128	67	37	13	3	
													8	7	4	3	2	1	
													199	135	71	40	15	4	1
														20	15	7	2	1	
														155	86	47	17	5	1
															7	5	1	1	
															93	52	18	6	1

La vie de 876 femmes.

De 0 à 4 ans	De 5 à 9 ans	De 10 à 14 ans	De 15 à 19 ans	De 20 à 24 ans	De 25 à 29 ans	De 30 à 34 ans	De 35 à 39 ans	De 40 à 44 ans	De 45 à 49 ans	De 50 à 54 ans	De 55 à 59 ans	De 60 à 64 ans	De 65 à 69 ans	De 70 à 74 ans	De 75 à 79 ans	De 80 à 84 ans	De 85 à 90 ans	De 90 à 94 ans	De 95 à 99 ans
77	72	69	65	60	55	50	47	44	42	38	27	23	15	10	5	2	1	1	
	110	107	103	100	95	92	86	76	67	57	47	37	28	16	15	7	3		
	182	170	168	160	150	142	133	120	109	95	74	60	43	26	20	9	4	1	
		111	107	103	95	89	84	79	62	55	44	35	26	18	12	5	2	1	
		287	275	263	245	231	217	199	171	150	118	95	69	44	32	14	6	2	
			85	81	76	68	64	60	57	43	41	33	29	21	10	2	1		
			360	344	321	299	281	259	228	193	159	128	98	65	42	16	7	2	
				62	60	52	49	43	40	33	29	26	22	15	12	5	2		
				406	381	351	330	302	268	226	188	154	120	80	54	21	9	2	
					49	46	39	37	36	33	21	18	12	10	3	2	1		
					430	397	369	339	304	259	209	172	132	90	57	23	10	2	
						74	70	63	59	49	43	37	33	23	12	4	3		
						471	439	402	363	308	252	209	165	113	69	27	13	2	
							69	61	56	52	46	39	31	21	13	8	4	1	
							508	463	419	360	298	248	196	134	82	35	17	3	
								59	56	46	40	31	23	17	15	6	2	1	
								522	475	406	338	279	219	151	97	41	19	4	
									54	49	34	28	21	14	11	6	2	1	
									529	455	372	307	240	165	108	47	21	5	
										59	54	41	32	23	12	4	3	1	
										514	426	348	272	188	120	51	24	6	1
											28	28	21	19	13	6	3	2	
											454	376	293	207	133	57	27	8	1
												22	21	12	4	3	2		
												398	314	219	137	60	29	8	1
													9	9	3	2	1		
													323	228	140	62	30	8	1
														3	2				
														231	142	62	30	8	1
															5	4	3	1	
															147	66	33	9	1

Rente totale payée aux jeunes filles.

J'ai trouvé d'après les données des Livres des Rentes Viagères qu'en moyenne un groupe de 224 jeunes filles en-dessous de dix ans, dont on avait assuré la vie, ont tiré leurs rentes pendant un peu plus de $44\frac{1}{2}$ années. Parmi elles il y en avait 14 en-dessous de 1 an, 18 entre 1 et 2 ans, 17 entre 2 et 3 ans, 25 entre 3 et 4 ans, 18 entre 4 et 5 ans. Les autres au nombre de 132, étaient âgées de 5 à 9 ans. Ces dernières ont vécu $45\frac{4}{5}$ années en moyenne, et les premières, au nombre de 92, un peu plus de 43 ans.

Et aux jeunes gens.

De même 274 garçons en-dessous de 10 ans dont on avait assuré la vie ont tiré leurs rentes pendant un peu moins de 41 ans, en moyenne. Parmi ces garçons il y en avait 10 en-dessous de 1 an, 29 entre 1 et 2 ans, 30 entre 2 et 3 ans, 29 entre 3 et 4 ans, 25 entre 4 et 5 ans; les autres étaient âgés de 5 à 9 ans.

Moyenne.

Le nombre total des filles et des garçons dont nous venons de parler est de 498. Ils ont en moyenne tiré leurs rentes pendant $42\frac{1}{2}$ années; mais si l'on ne considère que les 151 garçons âgés de 5 à 9 ans et qu'on y ajoute les 132 filles du même âge, on trouvera que ces deux derniers groupes ont obtenu leurs rentes pendant un peu plus de $43\frac{1}{4}$ ans, en moyenne.

Rente totale payée aux enfants en-dessous de 10 ans.

526 femmes en-dessous de 20 ans ont tiré leurs rentes viagères pendant $41\frac{1}{4}$ années en moyenne, et 547 hommes du même âge pendant $38\frac{1}{4}$ années en moyenne. En prenant la somme des deux on voit que 1073 personnes des deux sexes ont en moyenne tiré leurs rentes pendant 40 ans à fort peu près. Que l'on ne m'objecte point que les nombres précédents sont trop petits pour que l'on puisse en tirer la vraie moyenne du nombre d'années pendant lequel les assurés obtiennent leurs rentes: ceux qui connaissent bien les règles du calcul des chances peuvent aisément voir le contraire.

Le tableau qui se rapporte au sexe masculin fait voir qu'on a pris une assurance pour 100 garçons de 0 à 4 ans; pour 110 garçons de 5 à 9 ans; pour 108 garçons de 10 à 14 ans, etc. Tous ces nombres sont reliés dans le tableau par une ligne qui descend de plus en plus. A côté d'eux on trouve les nombres qui indiquent combien

de personnes vivaient encore, de 5 à 5 ans; ils ont été calculés d'après les dates des décès. Toutefois j'ai admis dans ce tableau que tous les hommes n'ont vécu que jusqu'à la fin du semestre précédant celui pendant lequel ils sont décédés. Les colonnes horizontales écrites à la suite des nombres de personnes assurées sont appelées colonnes des nombres simultanés, parce que les personnes auxquelles ces nombres se rapportent ont acheté une assurance à-peu-près à la même époque. Mais pour éviter les inégalités dans les nombres des décès, lorsque ces nombres deviennent petits, et parce que peu de personnes âgées assurent leurs vies et qu'on ne pourrait donc faire un calcul exact relatif à ces personnes âgées, je prends les sommes de quelques nombres, comme on peut le voir dans les tableaux, et je suppose que les autres personnes assurées achètent une nouvelle assurance tous les 5 ans. On trouve que les sommes dont j'ai parlé sont à-peu-près proportionnelles aux „nombres simultanés" qui se rapportent aux mêmes années; et il en sera toujours ainsi, même quand on ajoute ensemble des nombres de personnes du même âge empruntés aux livres de différentes compagnies d'assurance, à condition d'exclure les périodes de grande mortalité, car celles-ci pourraient avoir influence sur une liste et non pas sur une autre, au moins pour les personnes d'un certain âge, et ainsi il n'y aurait plus de concordance.

Les tableaux précédents nous conduisent à une foule de conclusions remarquables. La vie humaine sera généralement encore un peu plus longue qu'on ne le dirait d'après ces tableaux, parce que je n'ai tenu compte que des semestres entiers pendant lesquels les personnes considérées ont vécu, et qu'elles avaient déjà dépassé d'une fraction le nombre d'années qui est pris pour leur âge. En revanche elle sera en moyenne un peu plus courte parce qu'on *choisit* les personnes pour lesquelles on achète une assurance; nous pouvons être certains au moins qu'elles n'étaient pas fort malades lorsqu'on assura leurs vies. On voit d'après les tableaux précédents qu'il y a une grande différence entre la vie des hommes et celle des femmes, différence qui mérite d'être prise en considération dans le calcul des rentes. Personne que je sache n'y a cependant eu égard; c'est pourquoi j'ai pris la peine moi d'en tenir compte dans mes calculs. Les rentes indiquées dans le tableau suivant n'ont pas été calculées d'après les sommes payées par chaque individu, mais dans l'hypothèse que chaque personne a

été assurée pour la même somme, ce qui revient au même, car quoiqu'on hasarde plus dans un cas que dans l'autre, la chance de profiter de l'assurance est néanmoins en moyenne égale pour les personnes de tout âge, pourvu que la grandeur des rentes soit bien déterminée.

Rentes viagères payées à des femmes.

Je trouve pour la valeur des rentes viagères, pour le sexe féminin, de 5 à 5 ans, le tableau suivant

	En classes	D'après le tableau	Sans impôt	Avec impôt	Payements égaux An : Mois
De 5 à 9 ans	fl. 1936	fl. 1931	fl. 4 : 3	fl. 5 : 4	37 : 6
,, 10 à 14 ,,	,, 1832	,, 1840	,, 4 : 7	,, 5 : 9	34 : 8
,, 15 à 19 ,,	,, 1737	,, 1733	,, 4 : $12\frac{1}{2}$	,, 5 : $15\frac{1}{2}$	31 : 7
,, 20 à 24 ,,	,, 1627	,, 1630	,, 4 : $18\frac{1}{2}$	,, 6 : 3	28 : 10
,, 25 à 29 ,,	,, 1524	,, 1533	,, 5 : $4\frac{1}{2}$	,, 6 : $10\frac{1}{2}$	26 : 5
,, 30 à 34 ,,	,, 1448	,, 1438	,, 5 : $11\frac{1}{2}$	,, 6 : 19	24 : 2
,, 35 à 39 ,,	,, 1334	,, 1328	,, 6 : $\frac{1}{2}$	,, 7 : $10\frac{1}{2}$	21 : 8
,, 40 à 44 ,,	,, 1221	,, 1203	,, 6 : 13	,, 8 : 6	19 : 1
,, 45 à 49 ,,	,, 1076	,, 1077	,, 7 : $8\frac{1}{2}$	,, 9 : 6	16 : 6
,, 50 à 54 ,,	,, 969	,, 964	,, 8 : 6	,, 10 : $7\frac{1}{2}$	14 : 6
,, 55 à 59 ,,	,, 884	,, 851	,, 9 : 8	,, 11 : 15	12 : 5
,, 60 à 64 ,,	,, 753	,, 733	,, 10 : $18\frac{1}{2}$	,, 13 : 13	10 : 6
,, 65 à 69 ,,	,, 613	,, 616	,, 13 : —	,, 16 : 4	8 : 8
,, 70 à 74 ,,	,, 493	,, 493	,, 16 : 5	,, 20 : 6	6 : 9
	A	B	C	D	E

Explication du Tableau précédent.

La colonne A représente la somme comptante qu'on doit payer pour obtenir une rente viagère de 100 florins par an, dont la cinquième partie est due à l'Etat, de sorte qu'il reste fl. 80. Le taux de l'intérêt des rentes amortissables est de $2\frac{1}{2}$ %. Pour plus de brièveté j'ai supposé que les rentes viagères ne soient payées qu'à la fin de chaque année, supposition qui ne conduit pas à des calculs fort inexacts; car une somme comptante de fl. 100,

placée à un intérêt composé de $2\frac{1}{2}$ % par an, vaudra fl. 268 et 10 sous au bout de 40 ans, et la même somme, placée à un intérêt composé de $1\frac{1}{4}$ % par semestre, vaudra fl. 270 et 4 sous au bout de 80 semestres; la différence n'est que de fl. 1 et 14 sous. De plus l'augmentation du capital obtenue par ce dernier placement (qui est de $\frac{1}{158}$ environ) est réduite à fort peu de chose, si en calculant les sommes comptantes d'après les valeurs finales on procède aussi par semestres. J'ai pris pour les nombres annuels des décès des nombres formant autant que possible des séries régulières, de telle sorte que de 5 à 5 ans ces nombres s'accordent avec les vraies valeurs. Quant aux irrégularités provenant des inégalités de ces dernières valeurs, ainsi que des différences annuelles entre les nombres de personnes appartenant à une même classe de 5 années, je les ai laissées telles qu'elles étaient, sans y apporter aucun changement qui eût régularisé la série formée par les nombres successifs que expriment les valeurs comptantes.

Pour compenser ces irrégularités, je calcule d'abord — en partant des tableau donné plus loin pour la vie et la mort des femmes et qui est basé sur le tableau des femmes que nous avons donné plus haut — les rentes viagères pour des jeunes filles de $7\frac{1}{2}$ ans, puis pour des jeunes filles de $12\frac{1}{2}$ ans, et ainsi de suite, de 5 à 5 ans; ce qui s'accordera à-peu-près avec les classes de 5 à 9 ans, de 10 à 14 ans, etc.; les nombres ainsi obtenus et qui forment la colonne B forment une série assez regulière. Et comme ces nombres, lorsqu'on exclut les irrégularités du premier tableau, s'accordent assez bien avec l'expérience, il s'ensuit que dans le tableau des femmes que nous donnerons plus loin, la vie des femmes n'est prise ni trop courte ni trop longue.

La colonne C donne les nombres des florins et des sous qui forment les rentes viagères que chaque personne de l'âge indiqué doit tirer annuellement de ses fl. 100, s'il n'y a pas d'impôts et qu'on reçoit $2\frac{1}{2}$ % par an de l'argent placé. Tous ces nombres ne sont déterminés qu'à un demi-sou près. La colonne D donne les nombres correspondants, lorsque la septième partie est due à l'Etat.

La colonne E donne le nombre d'années et de mois pendant lesquels on a droit à un payement égal à la rente viagère. Exemple: la valeur comptante des rentes viagères pour une jeune fille âgée de 10 à 14 ans, est de fl. 1840. On en tire fl. 80 par an, en tenant compte de l'impôt. Or si, à cause de l'incertitude de la vie humaine, on voulait immédiatement après l'achat échanger le droit qu'on a obtenu contre celui d'une rente annuelle de fl. 80 à payer soit à l'acheteur soit à ses héritiers, on peut se demander pendant combien d'années on aurait droit à cette rente. Pour trouver la réponse j'agis comme suit. Je multiplie d'abord fl. 1840 par $2\frac{1}{2}$, ce qui représente l'intérêt annuel que l'acheteur doit recevoir pour une somme de fl. 100. Le produit est de fl. 4600. Retranchez ce nombre de 80 fois fl. 100, c. à. d. de fl. 8000; il reste fl. 3400. En retranchant le logarithme de ce dernier nombre de celui de 8000, on trouve un reste de 0,371611; en divisant ceci par le logarithme de $\frac{41}{40}$, on obtient 34 ans et 8 mois. Mais si l'on suppose que les rentes viagères et les intérêts doivent être payés tous les semestres, il faut diviser par le logarithme de $\frac{81}{80}$; le nombre des mois est alors diminué de trois.

Le tableau suivant qui se rapporte au sexe masculin a été composé de la même manière et sert au même usage que le tableau précédent qui se rapportait aux femmes.

Les rentes viagères pour le sexe masculin.

	En classes	D'après le tableau	Sans impôt	Avec impôt	Payements égaux An	Mois
De 5 à 9 ans	fl. 1856	fl. 1823	fl. 4 : 8	fl. 5 : 10	34 :	2
,, 10 à 14 ,,	,, 1721	,, 1714	,, 4 : $13\frac{1}{2}$	,, 5 : 17	31 :	1
,, 15 à 19 ,,	,, 1600	,, 1608	,, 4 : $19\frac{1}{2}$	,, 6 : $4\frac{1}{2}$	28 :	3
,, 20 à 24 ,,	,, 1503	,, 1504	,, 5 : $6\frac{1}{2}$	,, 6 : 13	25 :	9
,, 25 à 29 ,,	,, 1417	,, 1401	,, 5 : 14	,, 7 : $2\frac{1}{2}$	23 :	4
,, 30 à 34 ,,	,, 1303	,, 1291	,, 6 : 4	,, 7 : 15	20 :	11
,, 35 à 39 ,,	,, 1162	,, 1184	,, 6 : 15	,, 8 : 9	18 :	8
,, 40 à 44 ,,	,, 1057	,, 1069	,, 7 : $9\frac{1}{2}$	,, 9 : 7	16 :	6
,, 45 à 49 ,,	,, 944	,, 955	,, 8 : $7\frac{1}{2}$	,, 10 : $9\frac{1}{2}$	14 :	4
,, 50 à 54 ,,	,, 809	,, 840	,, 9 : $10\frac{1}{2}$	,, 11 : 18	12 :	4
,, 55 à 59 ,,	,, 754	,, 756	,, 10 : $11\frac{1}{2}$	,, 13 : $4\frac{1}{2}$	10 :	11
,, 60 à 64 ,,	,, 671	,, 661	,, 12 : 2	,, 15 : $2\frac{1}{2}$	9 :	5
,, 65 à 69 ,,	,, 577	,, 575	,, 13 : 18	,, 17 : 8	8 :	—
,, 70 à 74 ,,	,, 469	,, 481	,, 16 : $12\frac{1}{2}$	,, 20 : 16	6 :	7
	A	B	C	D	E	

Si l'on prend 4 % pour le taux des rentes amortissables, je trouve $5\frac{1}{2}$ % en prenant la moyenne entre les rentes viagères dues aux jeunes filles de 5 à 9 ans et celles dues aux jeunes filles de 9 à 14 ans; le nombre $5\frac{1}{2}$ se rapporte donc, peut-on dire, à une jeune fille de 10 ans. Pour un garçon du même âge je trouve $5\frac{7}{8}$ %, en ayant égard à l'impot. Pour un même nombre de garçons et de filles, la valeur moyenne de la rente viagère est donc de $5\frac{11}{16}$ %; ce nombre n'est supérieur que de $\frac{1}{16}$ % à celui que j'ai trouvé d'après les régistres des décès de la ville de Londres.

Les tableaux et les calculs précédents ne sont pas basés sur

des hypothèses, mais véritablement sur l'expérience; en effet, les nombres employés proviennent des Livres des Rentes Viagères composés par ordre du gouvernement. J'ai fait un fidèle usage de ces Livres: je pourrais montrer la copie de l'année et du jour où chacun a assuré sa vie, de l'âge de la personne assurée, et du temps précis, c. à. d. de l'année, du mois et du jour où chacune d'elles est morte, excepté quelques-unes dont on n'a pu savoir la date du décès et dont on s'est contenté d'indiquer la date jusqu'où elles ont reçu leurs rentes. Je n'ai omis personne et pour le petit nombre qui vivaient encore en 1738 j'ai ajouté à l'aide du calcul des probabilités le temps pendant lequel on pouvait admettre qu'ils vivraient encore. Je dis ceci pour qu'on ne soit pas amené à penser que je veuille me mêler à la dispute entre M. JOHAN VAN DER BURG, Seigneur de Sliedrecht, et M. WILLEM KERSSEBOOM et que j'aie choisi mes nombres pour donner raison à l'un deux. Il m'est parfaitement égal lequel des deux a raison; je ne cherche que la vérité et j'estime que si des personnes impartiales tiraient les chiffres des rentes viagères d'autres Livres et en d'autres pays, en considérant toutes les personnes qui ont acheté une assurance peu avant ou peu après 1672, les divisant en classes et notant les nombres d'années pendant lesquelles elles ont tiré leurs rentes, de la même manière que j'ai fait ci-dessus, elles arriveraient à un résultat à-peu-près identique. A des époques plus reculées une épidémie de peste, surtout si les assurances avaient été achetées peu avant le commencement de cette épidémie, pouvait diminuer le nombre moyen d'années pendant lesquelles les rentes étaient payées; j'estime que dans ces cas exceptionnels le profit devrait être pour l'Etat pour compenser les pertes qu'il peut avoir dans les temps où la santé est bonne.

On peut obtenir journellement à la Haye des assurances pour des personnes arbitrairement choisies, à un intérêt annuel de 6 %, c. à. d. de $5\frac{1}{10}$ % en tenant compte de l'impôt [1]). Les acheteurs qui assurent des jeunes filles de 5 à 9 ans, recevront (si l'on exclut les fortes mortalités) un intérêt de $3\frac{5}{8}$ % de l'argent qu'ils ont placé; et un intérêt de $3\frac{1}{3}$ % lorsqu'il s'agit de garçons du

1) D'après un traité, imprimé à la Haye en 1738, p. 25.

même âge. Sur chaque assurance qui lui procure fl. 80 par an (en tenant compte de l'impôt), l'acheteur gagne fl. $362\frac{3}{8}$ au comptant pour une jeune fille et fl. $254\frac{3}{8}$ pour un garçon de l'âge indiqué; outre les $2\frac{1}{2}$ % d'intérêt qu'il doit recevoir annuellement. Le gain est calculé d'après la colonne B; il serait un peu plus grand encore si l'on voulait se servir de la colonne A.

Pour calculer les rentes viagères pour des âges déterminés, de 5 à 5 ans, — car on peut aisément déterminer ensuite les nombres qui correspondent aux âges intermédiaires — je calcule d'après la table des hommes qui se trouve plus bas, que l'assurance achetée pour un garçon de 5 ans vaut fl. 1832; et d'après la table des femmes qui suit celle-là que l'assurance achetée pour une jeune fille du même âge vaut fl. 1928; dans les deux cas on a pris $2\frac{1}{2}$ % pour l'intérêt des rentes amortissables. Quant aux autres nombres, je les trouve rapidement de la façon suivante. Prenons un exemple, celui d'un homme âgé de 20 ans précis: il faut calculer la valeur de son assurance. Dans la table (pag. 221) on voit que cette valeur est de fl. 1608 pour la classe de 15 à 19 ans, et de fl. 1504 pour la classe de 20 à 24 ans. La somme est de fl. 3112, et la demi-somme de fl. 1556; c'est la valeur cherchée. J'ai fait de même dans tous les autres cas. Dans la table suivante la colonne A donne la valeur de l'assurance pour les hommes, la colonne B celle pour les femmes; la colonne C la moyenne des deux, pour des nombres égaux de personnes des deux sexes. J'y ai ajouté (colonne D) la valeur des assurances d'après la table de M. HALLEY, qui se rapporte aux deux sexes; M. JEAN FRÉDÉRIC BEREWOUT a fait des calculs exacts en partant de cette dernière table.

Age	Hommes	Femmes	Moyenne	Halley	Différence en florins	Différence en florins
5 ans	fl. 1832	fl. 1928	fl. 1880	fl. 1816	– 64	
10 ,,	,, 1768	,, 1886	,, 1828	,, 1840	+ 12	
15 ,,	,, 1661	,, 1787	,, 1724	,, 1762	+ 38	– 3
20 ,,	,, 1556	,, 1682	,, 1619	,, 1665	+ 46	+ 5
25 ,,	,, 1452	,, 1582	,, 1517	,, 1557	+ 40	– 1
30 ,,	,, 1346	,, 1486	,, 1416	,, 1449	+ 33	– 8
35 ,,	,, 1237	,, 1383	,, 1310	,, 1341	+ 31	– 10
40 ,,	,, 1127	,, 1265	,, 1196	,, 1232	+ 36	– 5
45 ,,	,, 1012	,, 1140	,, 1076	,, 1121	+ 45	+ 4
50 ,,	,, 898	,, 1020	,, 959	,, 1009	+ 50	+ 9
55 ,,	,, 798	,, 908	,, 853	,, 901	+ 48	+ 7
60 ,,	,, 708	,, 792	,, 750	,, 774	+ 24	
65 ,,	,, 618	,, 674	,, 646	,, 638	– 8	
70 ,,	,, 528	,, 554	,, 541	,, 495	– 46	
	A	B	C	D	E	F

Quant aux assurances prises pour de jeunes enfants et pour des vieillards, on voit par la colonne E que dans la table de M. HALLEY les nombres ne se suivent pas d'après la même loi que dans la mienne; mais pour les personnes de 15 à 55 ans les rentes viagères suivent une loi assez régulière. Il semble que les habitants de Breslau vivent en général un peu plus longtemps que les Hollandais. Si l'on suppose qu'à cause de cette différence dans la durée de la vie il faut retrancher fl. 41 de chaque somme dans la colonne de Breslau, la différence entre la table de M. HALLEY et la mienne devient extrêmement petite, comme on peut le voir à la colonne F.

Nombre des années pendant lesquelles les jeunes gens et les jeunes filles tirent leurs rentes.

Supposons qu'on doive trouver d'après la table qui nous a fourni la colonne B le nombre d'années pendant lequel une personne d'un âge donné recevra ses rentes viagères lesquelles sont payées jusqu'au jour de sa mort. Il s'agit par exemple d'une jeune fille de 5 ans. Dans la table nommée il est fait mention de 711 jeunes filles de cet âge. Au bout d'un an 11 d'elles sont mortes. Je suppose qu'elles aient toutes vécu précisément six mois après l'achat de l'assurance. En multipliant 11 par $\frac{1}{2}$, on voit qu'elles ont tiré leurs rentes pendant $5\frac{1}{2}$ ans. A la fin de l'année suivante il y en a de nouveau 8 qui sont mortes. Je suppose que

chacune d'elles ait tiré sa rente pendant $1\frac{1}{2}$ an. On obtient ainsi un produit de 12 ans; et en continuant ainsi d'année à année, en ajoutant tous les produits, et en divisant par 711, je trouve 44 ans et 4 mois. Et pour les garçons du même âge 40 ans et 2 mois. La moyenne, en prenant des nombres égaux de personnes des deux sexes, est de $42\frac{1}{4}$ ans. Or, l'expérience donne environ 43 ans. J'ai fait ce calcul pour montrer que dans la table en question la vie des garçons et des jeunes filles de 5 ans n'a pas été prise trop longue.

Prix d'une pension complète pour la vie.

Ce qui précède permet aux directeurs des Maisons, où l'on achète sa place pour toute la vie, de calculer aisément quelle somme doit être payée par une personne d'un âge déterminé. Supposons par exemple qu'une femme âgée de 48 ans veuille acheter une place dans une Maison où la pension complète durant un an est évaluée à fl. 300. On demande la somme comptante qu'elle devra payer en entrant dans la Maison. La valeur de l'assurance pour une femme de 45 ans est de fl. 1140, et pour une femme de 50 ans de fl. 1020. La différence est de fl. 120; fl. 120 pour une différence d'âge de 5 ans donnent fl. 72 pour une différence d'âge de 3 ans. Si nous retranchons ce nombre de fl. 1140, il reste fl. 1068: c'est la valeur de l'assurance pour une femme de 48 ans. Pour obtenir annuellement fl. 80 à cet âge on doit payer fl. 1068 au comptant; il s'ensuit que pour dépenser fl. 300 par an, on doit payer fl. 4005. Si l'on avait fait cette condition qu'au bout de 10 ans, si cette dame vivait encore et qu'elle ne désirait plus rester dans la Maison, elle pourrait en sortir et qu'on lui rendrait la somme à laquelle elle aurait droit, nous pouvons calculer cette somme de la manière suivante. La valeur de l'assurance pour une femme de 58 ans est de fl. $836\frac{4}{5}$; comme une rente annuelle de fl. 80 correspond à fl. $836\frac{4}{5}$, il s'ensuit qu'à fl. 300 correspondent fl. 3138. C'est là la somme qu'elle devra recevoir en quittant la Maison. Elle n'a donc dépensé que fl. 867. Cela paraît peu, mais l'exiguité de cette somme peut s'expliquer par deux raisons, d'abord par le risque que cette dame ou ses héritiers ont eu de perdre tout leur argent pendant ces dix ans au profit de la Maison, d'autre part par le fait que les directeurs ont pu tirer l'intérêt de la majeure partie de l'argent reçu.

Tontine d'Amsterdam.

Le 4 Mars de l'année 1671 on a vendu à Amsterdam 200 assurances à fl. 250 la pièce, donc pour une valeur totale de fl. 50000. Les acheteurs perdaient leur capital; en revanche ils recevraient chaque année, le 15 Mars, à partir de l'année 1672, une somme de fl. 2000, à diviser entre tous les survivants. Ce payement annuel ne cessera que lorsque la dernière personne sera morte. Une personne âgée de 45 ans prit 10 assurances, une de 52 ans, une de 47 ans, et une de 26 ans prirent 2 assurances chacune; on en prit 2 également pour chacun de trois jeunes gens entre 15 et 20 ans, et de même pour deux fillettes, âgées de 2 et de 6 ans. La tontine entière se composait donc de 183 personnes. L'âge de chacune d'elles au moment de l'achat est indiqué dans le tableau suivant, et de même l'année où elle est morte. La lettre V indique que la personne vivait encore le 15 Mars 1738; la lettre M indique que la personne était du sexe masculin, la lettre F qu'elle était du sexe féminin.

Age	Mort	Age	Mort	Age	Mort	Age	Mort	Age	Mort	Age	Mort	Age	Mort
M 45	1680	F 11	1709	F 7	1723	F 14	1727	F 12	1706	F 18	1708	F 15	1715
M 34	1710	M 5	1679	M 5	1709	F 43	1679	M 10	1707	M 9	1672	F 13	1674
F 6	1729	F 14	1692	F 8	1734	F 5	1688	F 8	1714	F 3	V	F 8	V
F 25	1722	M 11	1709	F 12	1733	F 1	1735	F 5	V	M 22	1711	F 6	V
F 25	1706	F 8	1728	M 18	1682	M 10	1722	F 2	1690	M 1	1724		
F 24	1682	F 6	1730	M 13	1719	M 6	1704	F 16	1692	F	1704		
M 27	1692	M 1	1731	F 10	1712	F 11	1705	M 15	V	F	1704		
F 13	1724	M 5	1676	F 5	1710	F 4	1710	M 11	V	F	1706		
F 6	1729	F 1	1731	F 2	1704	M 17	1711	F 8	1723	F 8	1711		
F 4	1728	F 5	V	F 1	1676	F 7	1728	M 1	V	M	1689		
F 2	V	M 4	V	M 52	1694	M 1	V	F 5	1694	M 18	1696		
M $\frac{1}{3}$	1673	M 11	1679	F 50	1690	M 15	1699	M 10	1725	M	1721		
M 31	1722	F 4	V	F 2	1692	M 14	1718	F 9	1715	F 27	1715		
F 4	V	F 9	1713	M 16	1694	F 6	1711	M 7	1728	F 22	1714		
M 5	1709	M 5	1713	F 4	V	F 4	1734	F 3	1720	M 4	1698		
F 18	1682	F 4	1705	F 6	1714	F 10	1687	F 1	1693	F 2	1700		
M 17	1702	F 5	1694	M 4	1727	M 17	1702	M 8	1711	F $\frac{7}{26}$	1733		
M 1	1730	F 3	1685	M 26	1721	M 4	1687	F 9	V	M 5	1672		
M 2	1692	M 4	1717	M 7	1699	M 2	1724	M 8	1691	F 10	1728		
M 9	1710	F 3	V	M 15	1673	M 1	V	F 6	1671	M 47	1694		
M 13	1717	M 1	V	F	1680	M 12	1696	M 3	1687	F 16	1714		
M 10	1731	M 2	1727	F 34	1711	F 4	1682	M 1	1676	F 14	1710		
M 13	1712	M 1	1675	F 5	1702	F 8	1738	M	1700	F 12	1689		
F 7	1684	M 26	1708	M 6	1701	M 20	1710	M 8	1712	M 6	V		
F 11	1685	F 31	1710	F 36	1717	M 25	1677	F 6	1704	M 22	1714		
M 12	1683	M 1	1714	F 12	1720	M 13	1697	M 10	1705	F 40	1699		
F 16	1694	F 7	V	F 5	1685	M 3	1706	M 5	1709	M 15	1688		
M 12	1704	F 1	1721	F 27	1704	F 5	1709	M 5	V	M 19	1692		
M 21	1718	M 3	1714	M 26	1685	F 20	1726	F 4	1692	F 3	1718		
M 19	1727	F 11	1682	F 24	1692	F 18	1710	M 8	1682	F 16	1673		

La troisième et la neuvième personne n'en font qu'une: deux personnes différentes avaient acheté une assurance pour elle.

J'ai tiré ce tableau moi-même des Livres de la compagnie d'assurance; je pourrais montrer les extraits que j'en ai faits et donner les noms de toutes les personnes; je pourrais dire aussi chez qui ces Livres se trouvent actuellement. Le 15 Mars 1739 20 personnes vivaient encore, portant 16 noms de famille differénts. Il est remarquable que parmi les 20 personnes qui ont survécu il y a encore trois frères. Au mois de Mai de l'année 1739 une de ces personnes, une femme, est morte.

Somme moyenne qui aurait été payée à chaque personne, s'il s'était agi de rentes viagères.

Parmi les 183 personnes nommées il y en avait 41 du sexe masculin et 55 du sexe féminin en-dessous de 10 ans; si l'on suppose que toutes ces personnes eussent acheté une seule assurance, les hommes, en moyenne, auraient tiré leurs rentes pendant $38\frac{1}{2}$ ans et les femmes pendant un peu plus de 46 ans; ce qui fait une moyenne de 43 ans à-peu-près pour les 96 personnes des deux sexes 1). Mais si l'on considère toutes les personnes assurées jusqu'à l'âge de 20 ans afin d'obtenir des nombres un peu plus grands, on trouve que 70 hommes reçoivent leurs rentes durant 37 ans en moyenne et 78 femmes durant $41\frac{4}{5}$ ans. Tous les 87 hommes considérés aurant donc reçu leurs rentes durant un peu plus de 36 ans, en moyenne, et les 96 femmes durant 40 ans, si l'on tient compte des années durant lesquelles ceux qui vivent encore recevront probablement leurs rentes. Les 183 personnes auront donc reçu leurs rentes pendant un peu plus de 38 ans en moyenne. Si chaque personne avait acheté une seule assurance et devait recevoir un intérêt de $2\frac{1}{2}$ %, les rentes viagères devraient être en moyenne de $4\frac{2}{3}$ %; on peut compter que tous les assurés reçoivent une rente de $4\frac{2}{3}$ % durant $33\frac{1}{2}$ ans. Dans le cas d'une tontine, aussi bien que dans le cas où l'on paye une somme déterminée pour recevoir une rente fixe annuelle, ce seront en général des enfants ou des jeunes gens que l'on

---

1) Ceci s'accorde avec la moyenne pour les 498 garçons et filles en-dessous de 10 ans dont nous avons parlé plus haut (pag. 216), et qui recevaient leurs rentes viagères durant $42\frac{1}{2}$ ans.

assure. En effet, parmi les 176 personnes dont l'âge est mentionné, il y en avait 96 en-dessous de 10 ans et 150 en-dessous de 20 ans, c. à. d. $\frac{6}{7}$ du nombre total.

Augmentation des rentes annuelles.

L'augmentation des rentes annuelles dans cette tontine, — si l'on suppose que chaque personne ait pris une seule assurance — a été la suivante. Après 38 ans chaque personne recevait le double de ce qu'elle avait reçu d'abord — outre l'avantage qu'elle retirait de la mort de celles qui avaient acheté plus d'une assurance. Et ainsi de suite:

Après	46 ans	3	fois	Après	59 ans	6	fois
,,	52 ,,	4	,,	,,	61 ,,	7	,,
,,	56 ,,	5	,,	,,	63 ,,	8	,,

En 1738 chaque personne recevait environ 10 fois plus qu'au commencement; la mort de ceux qui avaient acheté plus d'une seule assurance (et dont la dernière est morte en 1729) a quelque peu contribué à produire ce résultat.

Décès.

Le nombre des survivants, de 5 à 5 ans, a été le suivant:

Année	Vivants	Année	Vivants	Année	Vivants
1671	183	1696	127	1721	52
1676	172	1701	116	1726	42
1681	166	1706	100	1731	27
1686	154	1711	79	1736	22
1691	144	1716	64	1739	20

Rentes diminuantes.

Si l'on désire au lieu d'une assurance qui donne fl. 80 par an, un payement fixe qui diminue continuellement, savoir de fl. 80 à la fin de la première année, de fl. 79 au bout de la deuxième, de fl. 78 au bout de la troisième, etc. jusqu'à zéro, à recevoir par l'assuré ou par ses héritiers, et qu'on compte un intérêt de $2\frac{1}{2}$ % par an, c. à. d. du denier quarante, on trouve, en prenant $40 = a$ et $80 = p$,

$$ap - \overline{1 - \frac{ap}{a+1} - p} : a^2$$

pour la valeur comptante de cette rente.

Cette formule donne ici fl. 1821 et $18\frac{2}{5}$ sous.

Rentes augmentantes.

Si l'on veut obtenir une rente que augmente progressivement,

c. à. d. une rente de fl. 1 au bout d'un an, de fl. 2 au bout de 2 ans, et ainsi de suite, fl. 1 de plus chaque année, et qu'on désire recevoir un intérêt de $2\frac{1}{2}$ % de la somme comptante de fl. 1600 qu'on a payée, on a

$$\frac{pq - a}{q + x} = \frac{p^{x+1}}{q^x},$$

où nous avons posé 1600 = a; 40 (l'intérêt étant du denier quarante) = p; p + 1 ou 41 = q; le nombre d'années demandé = x. Cette formule nous apprend que x est égal à 99 environ.

Nombre mariages subsisten après un tain nom d'années.

Nos tables (pag. 214 et 215) font voir combien de couples, lorsqu'un grand nombre de personnes dont l'âge est connu se marient, vivront encore ensemble après un temps donné, si l'on admet que la force vitale des mariés est égale à celle des personnes assurées. Supposons par exemple que 100 hommes, âgés de 30 à 34 ans, se marient avec 100 femmes du même âge. On demande combien de couples existeront encore après 20 ans. Je commence par avoir égard seulement aux hommes qui meurent; parmi 444 hommes, âgés de 30 à 34 ans, 262 vivent encore au bout de 20 ans, d'après la première table; parmi 100 hommes de cet âge, il en restera donc 59. Il y aurait donc encore 59 couples si aucune des femmes n'était décédée. Parmi 471 femmes, âgées de 30 à 34 ans, il en reste 308 au bout de 20 ans, d'après la deuxième table; parmi 59 il en restera donc 39. C'est là le nombre des couples qui existeront encore après 20 ans. Si l'on considère 100 couples qui se sont mariés entre 35 et 40 ans, on en trouvera encore 28 au bout de 20 ans; 52 hommes et 41 femmes seront morts, et si personne ne s'était remarié, on trouverait encore 20 veufs et 31 veuves. Si 100 hommes, âgés de 45 à 49 ans, se marient avec 100 femmes de 15 à 19 ans, 25 couples existeront encore au bout de 20 ans. Si 100 hommes, de 50 à 54 ans, se marient avec 100 femmes de 20 à 24 ans, 20 couples seulement existeront encore au bout de 20 ans. On peut en conclure que si 100 hommes, âgés de 50 ans précis, se marient avec 100 femmes de 20 ans, au bout de 20 ans il n'existera plus que 23 couples. On peut trouver le même résultat plus rapidement en se servant des tables qui suivent; et si personne ne s'est remarié, il y aura encore, au bout de 20 ans, 8 veufs et 52 veuves.

Si 100 hommes, âgés de 20 à 24 ans, se marient avec 100 femmes du même âge et qu'on demande combien de couples célébreront leurs noces d'argent, je trouve la réponse de la façon suivante. De 405 hommes il en reste 243 seulement au bout de 25 ans; de 100 hommes il en reste donc 60. De 406 femmes il en reste 268 au bout de 25 ans; de 100 il en reste donc 40. La réponse est donc: Quarante couples. Et parmi 1000 couples de cet âge 23 seulement célébreront leurs noces d'or, en d'autres termes; parmi 43 couples il n'y en a qu'un seul dont le mariage dure plus de 50 ans.

Durée des mariages.

Supposons que deux personnes dont l'âge est connu se marient, et que A parie qu'au bout d'un temps déterminé ce mariage sera rompu par la mort d'un des deux époux. B parie le contraire. Si les chances des deux parieurs sont égales, quel est ce temps déterminé? On suppose l'âge des époux déterminé par les deux premières colonnes du tableau suivant. En tenant compte de la diminution graduelle des chances (car la mortalité augmente avec l'âge), on trouve

Age des hommes	Age des femmes	Durée du mariage	
Ans	Ans	An	Mois
25	20	19	5
30	25	17	5
35	30	15	4
40	35	13	3
45	40	11	2
50	45	9	1

Les trois derniers nombres peuvent différer 1 ou 2 mois de la vraie valeur, attendu que dans les tables on ne trouve que des âges de différences finies.

Si un homme de 50 ans se marie avec une femme de 20 ans, on peut parier 1 contre 1 que ce mariage durera $11\frac{1}{4}$ ans. Si quelqu'un voulait parier 1 contre 1 que ce mariage durera 20 ans, il aurait 4 chances de gagner contre 13 de perdre.

Tables de la vie des hommes et des femmes.

Les deux tables suivantes qui sont tirées des tables précédentes (pag. 214 et 215) servent à faire voir séparément les nombres des décès des hommes et des femmes.

Table des Hommes.

Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes
5	710	20	607	35	474	50	313	65	142	80	33
6	697	21	599	36	464	51	301	66	132	81	29
7	688	22	591	37	454	52	289	67	123	82	25
8	681	23	583	38	444	53	277	68	114	83	22
9	675	24	575	39	434	54	265	69	105	84	19
10	670	25	567	40	424	55	253	70	97	85	16
11	665	26	558	41	414	56	241	71	89	86	13
12	660	27	549	42	404	57	229	72	82	87	10
13	654	28	540	43	393	58	217	73	75	88	8
14	648	29	531	44	382	59	206	74	68	89	6
15	642	30	522	45	371	60	195	75	61	90	4
16	635	31	513	46	360	61	184	76	54	91	3
17	628	32	504	47	349	62	173	77	48	92	2
18	621	33	494	48	337	63	162	78	43	93	1
19	614	34	484	49	325	64	152	79	38	94	

Table des femmes.

Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes
5	711	20	624	35	508	50	373	65	205	80	55
6	700	21	617	36	500	51	362	66	194	81	47
7	692	22	610	37	492	52	351	67	183	82	40
8	685	23	603	38	484	53	340	68	172	83	34
9	679	24	596	39	476	54	329	69	161	84	29
10	674	25	588	40	468	55	318	70	150	85	24
11	669	26	580	41	459	56	306	71	140	86	20
12	664	27	572	42	450	57	294	72	130	87	17
13	660	28	564	43	441	58	282	73	120	88	14
14	656	29	556	44	432	59	271	74	110	89	11
15	652	30	548	45	423	60	260	75	100	90	8
16	647	31	540	46	414	61	249	76	90	91	6
17	642	32	532	47	404	62	238	77	81	92	4
18	636	33	524	48	394	63	227	78	72	93	2
19	630	34	516	49	384	64	216	79	63	94	1

La première table nous fait voir que de 670 garçons de 10 ans

il n'en reste que 665 au bout d'un an, 660 au bout de deux ans et ainsi de suite. Les nombres de personnes dans la table des femmes ont la même signification. Je n'ai pas ajouté les nombres des enfants entre 0 et 5 ans, parce que ces nombres ne peuvent pas être tirés des Livres sur les Rentes Viagères; si l'on ajoute ces nombres en partant des meilleures données que nous possédons actuellement, on peut tirer de ces tables bien des résultats dont je ne parlerai pas pour le moment. Je me contenterai des exemples suivants.

Hommes propres au service militaire.

Si l'on veut savoir combien d'hommes propres au service militaire, donc entre 18 et 56 ans, se trouvent parmi un certain nombre de gens, jeunes et vieux, on peut calculer à l'aide des tables qu'il y en a 15 sur 64, en supposant la 10[ième] partie de ceux qui ont l'âge désiré malades ou plus généralement incapables de servir.

Nombre d'années qu'on peut espérer vivre.

Si l'on désire savoir combien d'années des personnes d'un âge déterminé peuvent encore espérer vivre, en d'autres termes jusqu'à quel âge on peut parier, 1 contre 1, qu'ils vivront; et plus généralement si l'on demande l'âge jusqu'où l'on peut parier un nombre donné contre 1 qu'ils vivront, nos tables fournissent la réponse. Supposons par exemple qu'on considère 100 personnes du même âge et qu'on demande à quelle époque la motié seront mortes; car alors, s'il s'agit de personnes en bonne santé ou telles au moins qu'on pourrait les assurer, il y a une chance contre une qu'une personne déterminée est encore en vie.

Age	Vie d'un homme	Vie d'une femme	Moyenne	Age	Vie d'un homme	Vie d'une femme	Moyenne
5	$40\frac{1}{2}$	$46\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{2}$	40	$18\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$
10	$38\frac{1}{4}$	$43\frac{1}{4}$	$40\frac{3}{4}$	45	16	$19\frac{1}{4}$	$17\frac{3}{4}$
15	$34\frac{1}{4}$	$39\frac{1}{4}$	$36\frac{3}{4}$	50	$13\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	15
20	$30\frac{3}{4}$	$35\frac{1}{2}$	33	55	$11\frac{3}{4}$	$14\frac{1}{4}$	13
25	$27\frac{1}{2}$	32	$29\frac{3}{4}$	60	10	12	11
30	$24\frac{1}{4}$	$28\frac{3}{4}$	$26\frac{1}{2}$	65	$8\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$	9
35	$21\frac{1}{4}$	$25\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{4}$	70	7	$7\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{4}$

On voit par ce qui précède qu'on peut parier 1 contre 1 qu'un

homme de 50 ans vivra encore $13\frac{1}{2}$ ans et une femme du même âge $16\frac{1}{2}$ ans, ce qui fait 15 ans en moyenne. D'après la table de M. HALLEY on trouve un peu moins de 17 ans pour la moyenne. Si l'on voulait parier 1 contre 1 qu'un homme de 50 ans vivra encore 20 ans, on aurait 97 chances de gagner contre 216 de perdre. De même, s'il s'agit d'une femme, 21 de gagner contre 31 de perdre. D'après la table de M. HALLEY une personne âgée de 50 ans a 71 chances d'atteindre l'âge de 70 ans contre 102 chances de mourir plus tôt. En 1738 un traité a paru à Londres dans lequel le nombre d'années que des personnes de 10 à 15 ans ont encore à vivre est fixé à 28; pour celles de 15 à 20 ans, à $27\frac{1}{2}$; de 20 à 25 ans, à $26\frac{3}{4}$; et ainsi de suite, de 5 à 5 ans, jusqu'à 60 ans: pour chaque nouvelle période de 5 ans la diminution du nombre d'années que les personnes considérées vivront encore serait supérieure de $\frac{1}{4}$ à la diminution précédente 1). Mais cette théorie n'est pas conforme à l'expérience et il serait superflu de la réfuter.

Partie de la population qui meurt annuellement.

La durée moyenne du temps que jeunes et vieux ont encore à vivre n'a pas encore été bien déterminée; on ne sait pas non plus quelle partie des habitants d'un pays meurt annuellement, les villes, les villages et la campagne étant considérés simultanément. Quant à la durée moyenne dont je viens de parler, depuis ma jeunesse j'ai entendu faire à ce sujet des suppositions étranges. Certains auteurs anglais ont évalué à $\frac{1}{30}$ la partie des habitants d'un pays qui meurent annuellement; mais outre qu'à certaines époques il meurt beaucoup de monde tandis qu'il en meurt peu à d'autres, il y a encore d'autres difficultés. Soient A et B deux villes également populeuses, situé dans le même climat et où l'état de santé est le même. Mais supposons que dans la ville B il y ait un bien plus grand nombre de couples mariés que dans la ville A, tandisque dans cette dernière ville on puisse gagner plus d'argent que dans la ville B, de sorte que de temps en temps nombre de jeunes gens partent de B pour se rendre à A où ils peuvent se rendre utiles.

1) „An Essay to ascertain value of Leases and Annuities for Years and Lives etc." p. 459, Londres 1738.

Supposons que durant quelques années la population des deux villes reste stationnaire, et le nombre des couples mariés également. Si dans les deux villes séparément on notait l'âge des décédés, qu'on ajoutait tous ces âges et qu'on divisait la somme par le nombre des décédés pour chaque ville, on trouverait un quotient plus élevé pour la ville A que pour la ville B. Et quoique l'état de santé soit le même pour les deux villes, il pourrait sembler que celui de la ville B est inférieur à celui de la ville A. C'est que dans la ville B le nombre des naissances est plus grand, et il meurt donc beaucoup plus de jeunes enfants.

M. MAITLAND à trouvé, en comptant le nombre des décès, qu'annuellement à Londres il meurt en moyenne $\frac{1}{25}$ du nombre des habitants, et pour la plupart des villages hollandais je trouve $\frac{1}{30}$, comme je le ferai voir ci-après. Je demande à ceux qui s'occupent de statistique si à leur avis ou commettrait une grande erreur en supposant qu'annuellement dans toute la Hollande il meurt $\frac{1}{23}$ de la population. Il faut en excepter les temps de peste. Mais si l'on admet que dans les villes hollandaises il meurt annuellement $\frac{1}{28}$ à $\frac{1}{29}$ où $\frac{7}{200}$ de la population, ce qui d'ailleurs ne s'accorde pas avec l'expérience, il en résulterait que dans toute la Hollande il meurt chaque année environ $\frac{1}{25}$ des habitants.

Si l'on prend $\frac{3}{80}$ pour le nombre annuel des décès dans les villes en question, la mortalité pour toute la Hollande sera de $\frac{1}{34}$ annuellement. — Si l'on possédait pour les villes A et B des tables de mortalité telles qu'on en publie à Londres et que des tables pour la ville A on voulait calculer la valeur d'une assurance pour un enfant en-dessous de 5 ans, on trouverait, à l'avantage des acheteurs, une valeur inférieure à la valeur réelle. On trouvera le contraire à l'aide des tables de mortalité de la ville B. Il faut donc toujours calculer la valeur des assurances d'après les données empruntées aux personnes de l'âge de celles qu'on veut assurer.

En général le nombre des femmes est supérieur à celui des hommes.

Dans les grandes localités de cette partie du monde, et même dans les villages lorsqu'on considère simultanément un grand nombre d'années, le nombre des garçons qui viennent au monde surpasse celui des filles. Si les filles vivaient en moyenne aussi longtemps que les

garçons, on trouverait à chaque instant plus d'hommes vivants que de femmes ; mais comme il y a une notable différence, le sexe féminin vivant plus longtemps que le sexe masculin, il s'ensuit que dans la plupart des localités ou en général lorsqu'on compte les individus des deux sexes, on trouve plus de femmes que d'hommes, excepté dans quelque fort petit village où il y aurait eu une forte mortalité parmi les femmes. Des hommes instruits ont jugé que le nombre par lequel celui des garçons nés surpasse celui des filles sert à la guerre, à la marine et à faire des voyages à l'étranger 1); mais cette opinion ne peut être soutenue, car en général tous les garçons en question sont déjà morts au bout d'un an, et à l'âge de 10 ans le nombre des filles semble généralement surpasser celui des garçons. En 1674, au deuxième mois, on compta la population entière de la ville de Miaco, par ordre formel de l'empereur du Japon, en notant aussi le nombre des partisans de différentes religions. On y trouva 405643 personnes, parmi lesquelles 182070 hommes et 223573 femmes, sans y comprendre le Dairo avec ses femmes et le reste de sa cour 2). Ici les femmes forment une partie encore plus notable de la population qu'à Bologne 3).

Pour apprendre à connaître le rapport entre le nombre d'hommes et celui des femmes dans les climats chauds on pourrait, si les données étaient plus complètes, se servir des dénombrements de la population que l'on fait aux Indes à de certains endroits. Dans la province d'Amboina par exemple ou a compté tant ceux qui étaient au service de la Compagnie Orientale (qui étaient au nombre de 950) que les indigènes et ceux qui appartenaient à d'autres nationalités; on a trouvé 22231 hommes, tandisque les femmes et les enfants étaient au nombre de 55989 4). D'autres endroits du même auteur nous portent à croire que par hommes il faut entendre ici les hommes capables de porter les armes. Il y a alors encore cette difficulté que nous ne savons pas quelles étaient pour ces derniers les limites d'âge.

Décès de jeunes enfants.

Beaucoup d'enfants, paraît-il, meurent peu de temps après la

1 ARBUTHNOTT, dans les Transactions anglaises No. 328, p. 189. NIEUWENTYD, „Regt gebruik der wereldbeschouwingen" (Véritable usage des différentes manières d'envisager le monde), p. 307. DERHAM „La Physique théologique", p. 193 Notes.

2 „Description du Japon" par ENGELBERT KAEMPFER, p. 140, Amsterdam 1729.

3 pag. 191.

4) VALENTYN „Description d'Amboina", p. 270.

naissance. A Leipzig 1563 garçons sont morts en 6 ans et parmi eux il y avait 325 enfants nouveau-nés ou du moins pas encore baptisés. 1) Le nombre des filles mortes pendant 6 ans a été de 1255, parmi lesquelles 237 nouveau-nées. En 4 ans 3687 enfants ont été baptisés dans cette ville, et 3690 personnes y sont mortes. Mais comme on ne nous dit pas jusqu'à quel âge on a considéré les enfants comme nouveau-nés, cela ne nous suffit pas. On ne possède pas encore de statistique qui nous permette de voir combien d'enfants, parmi un nombre donné, meurent endéans un mois ou un plus petit nombre donné de jours. Parmi chaque centaine de personnes, mortes à Vienne en 1737, il y en avait 37 au-dessous d'un an. 2) Mais comme on ne peut guère se fier à une statistique qui ne porte que sur une ou deux années et que de plus il faudrait savoir jusqu'à quel point ces régistres sont exacts, j'ai jugé plus sûr de consulter des régistres relatifs à un grand nombre d'années. Je dois ces régistres à M. JACQUES OOSTWOUD d'Oost-Zaandam, qui m'a remis des notes fort exactes prises depuis 1654 jusqu'à ce jour à Broek-in-Waterland. 3) Le jour de la naissance de chaque enfant y est noté et aussi l'an, le mois et le jour de chaque décès. Même on a tenu compte, et fort exactement, de ceux qui, en-dehors de ce village, sont morts dans des pays étrangers ou sur mer, ainsi que des enfants mort-nés, des enfants germains, etc. Si les extraits que j'ai tirés de ces régistres n'étaient pas si longs, je les aurais ajoutés à ce chapitre; mais comme cela prendrait trop de place, je ne publierai ici que les principales conclusions que j'en ai tirées.

Naissances et décès à Broek.

A Broek-in-Waterland 1807 enfants sont nés vivants depuis le commencement de l'année 1654 jusqu'à la fin de l'année 1738. En cette année 546 d'entre eux étaient encore en vie, à moins que quelques-uns qu'on avait perdus de vue et qui vivaient ailleurs ne fussent déjà morts. Pendant les trois premières années on n'a pas noté exactement le jour de chaque décès; on s'est contenté de noter l'année. C'est pourquoi je ne tiens compte des données que depuis 1657 jusqu'au commencement de 1738. Pendant ce temps

1) On les trouve mentionnés dans les Transactions anglaises sous trois noms différents, *Infants*, *Newborns*, et *Chrysoms*.

2 Pag. 178.

3 Un homme de qualité amateur de statistique, qui habitait ce village, a commencé à tenir ces régistres; ses descendants ont poursuivi son oeuvre.

867 garçons et 846 filles y sont nés vivants; parmi eux 365 garçons et 283 filles n'ont pas atteint l'âge d'un an; parmi chaque centaine de garçons 43 sont morts en-dessous d'un an, et parmi chaque centaine de filles un peu plus de 33, ou un tiers. Pendant les 85 années considérées 922 garçons et 885 filles en tout sont nés vivants; parmi ceux-ci 309 garçons et 240 filles sont décédés dans l'année même de leur naissance. Si c'est là le cours ordinaire des choses, on peut dire que dans une localité où du premier Janvier jusqu'au dernier jour de Décembre naissent 922 garçons et 885 filles, et où le nombre journalier des naissances est environ constant, 309 garçons et 240 filles sont déjà décédés au bout de l'année. Après avoir atteint l'âge d'un an, les enfants courent beaucoup moins de danger de perdre la vie. En 79 ans, depuis 1654 jusqu'à 1732, 810 garçons et 795 filles sont nés; parmi eux 337 garçons et 262 filles sont décédés avant d'avoir atteint l'âge d'un an; 26 garçons et 25 filles âgés de 1 à 2 ans; 24 garçons et 14 filles âgés de 2 à 3 ans; 10 garçons et 10 filles âgés de 3 à 4 ans; 6 garçons et 7 filles âgés de 4 à 5 ans; 4 garçons et 6 filles âgés de 5 à 6 ans; de sorte que la moitié des garçons sont morts avant d'avoir atteint l'âge de 6 ans, tandis que sur 100 filles 41 sont mortes avant d'avoir atteint cet âge. Le rapport du nombre des garçons qui vivent encore après un an à celui des filles du même âge a peu de valeur vu que ces nombres sont trop petits. Considérons encore le nombre de ceux qui sont nés depuis le commencement de l'année 1654 jusqu'à la fin de l'année 1728; ce sont 801 garçons et 785 filles. Parmi les garçons 415 sont morts en-dessous de 10 ans; parmi les filles 345. Cela fait 52 % pour les garçons et 44 % pour les filles. Mais comme il y a eu dans les dernières années plus de fortes mortalités que dans les premières, je considérerai encore le nombre des naissances depuis le commencement de 1657 jusqu'à la fin de 1706, c.à.d. durant 50 ans. Pendant ce temps 529 garçons et 539 filles sont nés; parmi eux 204 garçons et 157 filles sont décédés avant d'avoir atteint l'âge d'un an; 16 garçons et 19 filles âgés de 1 à 2 ans; 17 garçons et 11 filles âgés de 2 à 3 ans; 6 garçons et 8 filles âgés de 3 à 4 ans; 3 garçons et 5 filles âgés de 4 à 5 ans; 3 garçons et 4 filles âgés de 5 à 6 ans; de sorte que sur 100 garçons 47 sont morts en-dessous de 6 ans, tandisque le nombre correspondant pour les filles est de 38. Un nombre de

264 garçons et de 221 filles sont décédés avant d'avoir atteint l'âge de 10 ans; cela fait 50 % pour les garçons et 41 % pour les filles. En Allemagne sur 12631 enfants, morts avant d'avoir atteint l'âge de 10 ans, il y avait 50 garçons contre 43 filles. 1) On peut, me semble-t-il, se fier à ce rapport, parce qu'il a été trouvé d'après un grand nombre de cas, à moins qu'on ne pense que le rapport est quelque peu différent pour notre pays et pour l'Allemagne.

Enfants fort jeunes.

Quant aux enfants qui meurent fort jeunes, je trouve que depuis 1657 jusqu'à la fin de 1738, 878 garçons et 853 filles sont nés vivants et que parmi eux 163 garçons et 132 filles n'ont pas atteint l'âge d'un mois. Un nombre de 51 garçons et de 42 filles n'ont pas vécu plus d'une semaine; et parmi ces derniers 32 garçons et 28 filles ont vécu quatre jours ou moins. Si je divise les 85 années considérées en 17 classes, de 5 à 5 ans, telles qu'elles se suivent, je trouve qu'il n'est jamais arrivé que le nombre de ceux qui sont morts avant d'avoir atteint l'âge d'un an était égal à ou inférieur à la cinquième partie du nombre des naissances.

Enfants jumeaux.

Parmi les 1807 enfants dont j'ai fait mention ci-devant, il y avait 35 couples d'enfants jumeaux nés vivants, à savoir 10 couples de garçons, 8 couples de filles et 17 couples des deux sexes; il y avait en outre trois couples d'enfants dont l'un est né mort (à savoir une fille et deux garçons mort-nés); et un couple de garçons, dont l'un naquit un jour plus tard que l'autre. On peut donc dire que sur 51 enfants nés vivants il y aura en général un couple de jumeaux. — En 1667 une pauvre femme à Hoorn, soit dit en passant, a mis au monde 3 garçons et 1 fille, tous vivants. — Parmi les jumeaux dont j'ai parlé il y a eu 13 couples d'enfants dont un seul a été baptisé ou qui sont morts l'un et l'autre peu de temps après la naissance. On n'a donc pu baptiser dans l'église que 25 couples de jumeaux; et sur 72 enfants qu'on y a baptisés, il n'y a eu chaque fois qu'un seul couple de jumeaux.

Enfants mort-nés.

Depuis 1654 jusqu'à 1738, 1882 enfants sont nés à Broek, parmi lesquels 75 sont nés morts. Le sexe de ces derniers n'a pas été mentionné dans tous les cas; on ne l'a indiqué que pour 45 enfants, dont 30 garçons et 15 filles. En tout il y a eu un enfant sur 25 qui est né mort.

Rapport du nombre des garçons à celui des filles.

Pendant 6 ans, depuis 1654 jusqu'à 1659 inclusivement, 75 garçons et 71 filles sont nés vivants. En 1660, 22 filles et 8 garçons seulement sont nés, ce qui paraît étrange surtout parce

1) Voir pag. 187.

que 13 filles sont nées l'une après l'autre. On peut se figurer qu'en copiant les noms à la fin de l'année on ait commis quelque erreur; car il semble qu'on ne les inscrivait au régistre qu'à la fin de l'année en copiant les notes d'une feuille de papier ou d'un carnet; de cette façon les noms de quelques garçons peuvent avoir été inscrits parmi ceux des filles; le livre lui-même ne permet pas d'affirmer qu'une erreur de ce genre a eu lieu, attendu que les noms de baptême n'ont été inscrits qu'après 1661. Quoi qu'il en soit, pendant les 78 années suivantes 839 garçons et 792 filles sont nés vivants; le rapport de ces nombres est égal à celui des nombres 52 et 49 et s'accorde avec celui des nombres relatifs aux six premières années.

Le nombre des naissances n'est pas le même pour les différents mois. Voici les nombres des naissances à Broek: Nombre mensuel des naissances.

Janvier	162	Avril	140	Juillet	118	Octobre	219
Février	125	Mai	110	Août	152	Novembre	201
Mars	139	Juin	105	Septembre	163	Décembre	173

En 85 années 913 enfants en-dessous de 10 ans et 1278 personnes au-dessus de 10 ans sont décédés à Broek. Le nombre des décès a été supérieur de 381 à celui des naissances. Depuis 1729 jusqu'à 1738 inclusivement, 211 enfants y sont nés et 248 personnes y sont décédées; il faudrait donc ici, pour obtenir le chiffre de la population, multiplier par $23\frac{1}{2}$ le nombre annuel des décès et par $27\frac{1}{2}$ celui des naissances. En effet, en 1739 on a compté à Broek un nombre de 580 personnes. Comme le nombre des décès surpasse de beaucoup celui des naissances, et qu'en un siècle le nombre des maisons, ainsi que le chiffre de la population, sont restés à-peu-près invariables, il s'ensuit que de temps en temps des étrangers sont venus se fixer dans le village. Décès à Broek.

M. Jacques Oostwoud à ma demande est parvenu à établir qu'en 43 ans, depuis le commencement de 1696 jusqu'à la fin de 1738, 409 couples se sont mariés à Broek; depuis le commencement de 1729 jusqu'au 11 Octobre 1739, 106 couples s'y sont mariés au dire du sécrétaire, parmi lesquels il y en avait 66 dont l'époux et l'épouse étaient nés tous les deux à Broek, 15 dont les époux étaient nés à Broek et les épouses ailleurs, 22 dont les épouses étaient nées à Broek et les époux ailleurs, et 3 dont l'époux et l'épouse étaient nés ailleurs. En 72 années, depuis 1657

jusqu'a 1728 inclusivement, 1520 enfants y sont nés vivants; parmi ceux-ci 729 sont morts avant d'avoir atteint l'âge de 10 ans. JEAN ZOUW, peintre à Broek, y a compté, le 11 Octobre 1739, 140 maisons habitées, 100 couples mariés, 16 veufs, 41 veuves, 282 célibataires et enfants des deux sexes; le reste étaient des serviteurs et des servantes. Le livre mentionné précédemment me fait voir que depuis 1723 jusqu'à 1738, donc en 16 ans, 87 enfants en moyenne sont nés tous les quatre ans 1). Broek est un village exceptionnel qui ne ressemble pas à la majeure partie des autres villages. On ne permet pas au premier venu d'y habiter. On y trouve bon nombre de marchands fortunés. Cela se voit par le résultat d'une collecte pour les pauvres Vaudois, faite en 1731, à laquelle les habitants de ce village ont contribué plus que ceux des villes de Gouda et de Woerden ensemble, quoique le nombre des maisons de ces deux dernières villes fût plus de 28 fois plus grand que celui des maisons à Broek. Deux choses remarquables se montrent dans la statistique de Broek et il me semble qu'on pourra établir la même chose pour les grandes villes, telles que Londres ou Amsterdam, où beaucoup d'étrangers viennent se fixer, quoique les rapports y puissent avoir des valeurs légèrement différentes: la première c'est qu'il y a à Broek, en comparaison avec les villages dont nous parlerons plus loin, beaucoup moins de couples mariés, et la seconde que d'un même nombre de couples mariés moins d'enfants naissent chaque année que dans les villages en question. Quelle peut être la raison de ce dernier phénomène? Doit-on admettre qu'à Broek ou dans les villes dont la population augmente rapidement un plus grand nombre de personnes d'un certain âge se marient que dans les villages? Ou quelle autre raison peut-on en donner?

La population à Crommenie.

Comme il est presque impossible pour un simple particulier de compter la population des grandes villes et d'en recueillir toutes les données nécessaires, et que les hypothèses peuvent nous faire faire entièrement fausse route, j'ai essayé d'arriver à une bonne statistique en considérant quelques villages importants. A cet effet GERRIT SPINDER, arpenteur diplômé à Crommenie, a pris, à ma demande, des informations chez l'accoucheuse de ce village; il est parvenu ainsi à savoir qu'en 10 ans, depuis 1729 jusqu'à 1738,

1) Ce nombre est inférieur de $\frac{1}{8}$ environ à celui des enfants nés d'un même nombre de mariages dans les autres villages dont nous parlerons plus loin.

inclusivement, 1226 enfants y sont nés vivants, tandisque 1204 personnes y sont mortes. PIERRE NOOMES a compté exactement, en 1739, au mois de Mars, le nombre des habitants de tout le village de Crommenie; il a trouvé ce qui suit:

	Crommenie même	Den Horn	Tout Crommenie
Maisons habitées..........	420	83	503
Familles..................	511	97	608
Hommes et femmes.......	2050	374	2424
Dont en-dessous de 10 ans	503	121	624 1)

Les nombres des adhérents des divers cultes étaient les suivants:

	Crommenie	Den Horn	Ensemble
Réformés...............	1076	324	1400
Mennonites.............	367	28	395
Catholiques dans le village	175	22	629
Cathol. en-dehors du village	432		
Somme totale....	2050	374	2424

Pour apprendre à connaître aussi le nombre des hommes et des femmes séparément, ainsi que le nombre des couples mariés, des veufs et des veuves, le même PIERRE NOOMES a compté de nouveau et fort exactement les habitants, le 1, le 2 et le 3 Juillet de la même année. Il a trouvé ainsi 8 personnes de moins que la première fois: cette différence ne provient pas d'une erreur, mais du changement incessant auquel sont soumises les affaires de ce monde. En effet, outre les causes de diminution qu'il ignorait, il y avait celle-ci que trois familles avaient quitté Crommenie, dont deux s'etaient établies à den Horn; il faut songer aussi que le nombre des décès est quelquefois plus grand que d'ordinaire et peut ainsi surpasser celui des naissances. Voici le dernier dénombrement:

	Crommenie même	den Horn	Tout Crommenie
Hommes, jeunes et vieux.	998	178	1176
Femmes, jeunes et vieilles	1035	205	1240
Couples mariés..........	385	75	460
Veufs..................	54	14	68
Veuves.................	73	15	88

1) Dans quelques villages et à la campagne, dans le comté de Bois-le-duc, on a compté 10658 personnes en 1725, parmi lesquelles il y en avait 4678 en-dessous de 16 ans. Consultez à ce sujet la deuxième partie du 12ième tome de „l'Histoire Contemporaine", imprimée chez ISAAC TIRION à Amsterdam, en 1739 p. 173—191).

D'après l'usage établi à Crommenie aucun couple ne peut être marié dans l'église réformée à moins que les deux époux ne soient réformés et n'aient été baptisés dans l'église réformée ; les autres se marient devant le tribunal. D'après les données fournies par le sécrétaire 278 couples se sont mariés devant le tribunal de Crommenie depuis 1725 jusqu'en 1738 inclusivement, donc en 14 ans. Mais parmi ceux-ci sont compris les habitants de Crommeniedijk lesquels doivent se marier devant le tribunal de Crommenie ; ces derniers constituent la 7[ième] partie environ des 278 couples ; il s'ensuit que 238 couples habitant Crommenie se sont mariés devant le tribunal. JEAN CABEL, maître d'école et chantre en cet endroit, m'a fait savoir que pendant les 14 années dont nous parlons 189 couples s'y sont mariés dans l'église réformée. En ajoutant ce nombre aux 238 couples ci-devant mentionnés, on trouve 427 couples. En moyenne 61 couples se marient donc en deux ans; cela fait annuellement environ la quinzième partie des couples déjà mariés.

De Rijp. Le 5 Juillet 1739 PIERRE KARMAN, bourgmestre à De Rijp, a compté exactement le nombre des habitants et celui des différentes catégories de la population. Il y avait là 546 familles et 1870 personnes, à savoir 894 hommes et 976 femmes, parmi lesquels 388 couples mariés, 64 veufs, 83 veuves, 442 célibataires du sexe masculin, y compris les enfants, de même 505 femmes non-mariées, jeunes et vieilles. En 1738, d'après l'accoucheuse, 95 enfants y sont nés vivants ; il n'était pas possible d'obtenir le chiffre correspondant pour d'autres années, attendu que l'accoucheuse n'y était que depuis peu de temps ; mais d'autres femmes croyaient pouvoir affirmer que le nombre annuel des naissances était de 100 environ. Les maisons de De Rijp, outre les moulins, sont au nombre de 514. En tout, suivant le régistre officiel, on y trouve 575 maisons, magasins, etc. Si l'on en déduit les maisons inhabitées qu'on peut compter et qui se trouvent mentionnées aussi dans le régistre officiel, ainsi que les maisons de campagne de personnes vivant ailleurs, les magasins, les écuries, les bâtiments où l'on sérance le lin et les autres maisons de travail, ce qui fait un nombre de 93 en tout, il reste encore 482 maisons habitées par les 546 familles dont nous parlions. Pendant onze années, depuis 1728 jusqu'à 1738 inclusivement, 371 couples s'y sont mariés et 1388 personnes y sont mortes. Pendant les quatre premières années 657 personnes sont

mortes et 134 couples se sont mariés. Il y a donc eu en ce temps des mortalités extraordinaires. Il me semble qu'après ces fortes mortalités, le nombre de couples qui se marient est plus grand, soit à cause des situations vacantes soit pour d'autres raisons. En effet, en 1732 44 couples s'y sont mariés, et l'année suivante 51 couples; puis dans les 9 années suivantes, 276 couples. Pendant 4 ans, depuis 1734 jusqu'à 1737, 106 couples s'y sont mariés. Les nombres des couples mariés sont quelque peu irréguliers dans les dernières années et les nombres annuels qui se rapportent à des temps antérieurs ne peuvent servir attendu que la population, à ce qu'il paraît, était alors plus nombreuse. En 1632 on y comptait 641 maisons et autres édifices. Trois grandes incendies, en 1654, en 1657 et en 1674, ont causé de grands dommages à ce village; la première surtout l'a détruit presque entièrement.

L'exemple de Schagen peut aussi nous faire voir que le nombre des habitants d'une localité diminue parfois fortement. En 1618 il y avait là 432 familles; on y a compté 1619 personnes. Dans les environs vivaient 252 familles, comprenant 1116 personnes, ce qui fait 2735 en tout; mais les serviteurs, les servantes, les pensionnaires, etc. ne sont pas compris dans ce nombre 1). En 1673 on y a compté par ordre des Conseils Délégués les habitants du quartier du nord; leur nombre était de 1803. En 1703 on y a trouvé 1464 personnes. En 1632 il y avait 516 maisons à Schagen 2); en 1708 il n'y en avait que 441 et en 1732 on en a compté 397 et 4 moulins. En 76 ans la Seugneurie de Schagen, qui comprenait Schagen, Barsinghorn, Colhorn, Haringhuizen et Boghorn, a vu diminuer de 80 le nombre de ses maisons.

---

1 Voir la Chronique de Schagen, p. 14, Hoorn 1736.

2 Chronique de Medemblik, p. 181. Dans la suite de cette Chronique, p. 333, je trouve que le nombre des maisons à Naarden était de 747 en 1732. Le régistre mentionné ci-devant (Préface de la Géographie générale, p. 40) donne le nombre 480 beaucoup plus petit. Comme je tiens ce régistre d'une personne en qui l'on peut avoir confiance, j'étais dans l'embarras pour dire quel est le vrai nombre. Mais soit qu'il y eût une erreur dans le régistre soit que je me sois trompé moi-même en le copiant, il est certain que le nombre que donne la Chronique de Medemblik est plus correct: j'ai été dernièrement à Naarden, j'y ai compté le nombre des maisons et je suis arrivé ainsi à ce résultat. Il est possible que j'aie regardé quelques maisons comme appartenant aux villages environnants qui en réalité appartenaient à la ville. Dans le régistre on n'a indiqué que la somme des maisons de différentes petites villes et des villages environnant chacune d'elles.

Quadijk. Dans le village de Quadijk lui seul SYBRAND HAAS a compté en 1739, au mois de Septembre, 61 maisons, habitées par 37 couples mariés, 7 veufs, 14 veuves, et 113 célibataires, jeunes et vieux. Cela fait 208 personnes en tout. Parmi les célibataires il y avait 7 servantes ou serviteurs étrangers et 16 du village qui servaient ailleurs. En réalité il n'y avait donc que 192 personnes, et ici aussi le nombre des couples mariés est égal à la cinquième partie environ de la population. Pendant 19 ans, depuis 1720 jusqu'à 1738 inclusivement, 274 personnes y sont mortes et 60 couples s'y sont mariés. Depuis le premier Janvier de l'année 1719 jusqu'au dernier Septembre de l'année 1739, 175 enfants ont été baptisés à Quadijk dans l'église réformée, et 16 enfants nés à Quadijk ont été baptisés à Midlie: on les a fait baptiser dans ce dernier village, parce qu'en 1723, 1725 et 1726 la place de pasteur à Quadijk était vacante. Cela fait en tout 191 enfants. A Quadijk il y a sept familles catholiques et une famille luthérienne; de sorte qu'annuellement il y naît en moyenne 10 enfants. J'ai donné ces chiffres pour faire voir l'état de la population dans un petit village, dont le nombre d'habitants décroit fortement.

Les données relatives à ce dernier village m'ont été fournies par M. JACQUES OOSTWOUD, que j'ai nommé plus haut. M. JEAN FRÉDÉRIC BEEREWOUT m'a remis des notes qui se rapportent aux deux villages suivants; elles ont été écrites à sa demande par les révérends ministres du culte dans ces villages.

Spaarndam. A Spaarndam on a compté, au mois de Mai de l'année 1739, 102 familles comprenant 350 personnes, jeunes et vieilles. Parmi ces familles il y avait 17 familles catholiques et une famille juive; les autres étaient réformées. Il n'a pas été possible de déterminer exactement le nombre des naissances, parce que bien des accoucheuses étrangères y sont venues. Entre le premier Janvier de l'année 1729 et le premier Janvier de l'année 1739, 140 enfants ont été baptisés à l'église réformée qui tous étaient nés dans la commune de Spaarndam. Le premier Mai de l'année 1739, 73 de ces enfants étaient encore en vie. Dans tout le village vivaient 72 couples mariés, parmi lesquels un Juif, dont la femme demeurait à Amsterdam. Pendant 10 ans, depuis 1728 jusqu'à 1738, 57 couples s'y sont mariés, parmi lesquels 40 de Spaarndam, les autres de Sparewou, de Harlem ou d'autres localités. Le livre du fossoyeur fait voir que depuis Pâques de l'année 1729 jusqu'à

Pâques de l'année 1739 on y a enterré 191 cadavres, savoir

102 en-dessous } de 10 ans.
89 au-dessus }

En 1739, à la fin du mois de Mai, on a compté à Wijk-op-Zee 152 familles, savoir 42 familles réformées et 110 familles catholiques 1). Ces familles comprenaient 578 personnes, jeunes et vieilles, parmi lesquelles 129 couples mariés; il y avait 182 réformés et 396 catholiques. Pendant 10 ans, de 1729 jusqu'à 1738 inclusivement, 40 garçons et 47 filles ont été baptisés dans l'église réformée. D'après les notes de l'accoucheuse, 144 garçons et 159 filles y sont nés pendant ces dix ans. Pendant ce même laps de temps 351 personnes y ont été enterrées; mais en 1730 il y a eu une forte mortalité: en cette année 68 personnes ont payé leur tribut à la mort. Pendant 8 ans, depuis 1731 jusqu'à 1738, 241 personnes y ont été enterrées. Cela fait 30 par an en moyenne; nombre qui s'accorde parfaitement avec la moyenne des naissances pendant 10 ans. Wijk-op-Zee.

La statistique relative à ces villages fait voir que pour 100 couples mariés on trouvera 16 veufs et 23 veuves. Le nombre total des habitants de Crommenie, de De Rijp, de Wijk-op-Zee et de Spaarndam est de 5214; annuellement 264 enfants, en moyenne, sont nés dans ces quatre villages. Le nombre total des habitants est donc au nombre annuel des naissances comme 79 est à 4, et cette proportion est à-peu-près correcte pour chaque village séparément; comme on le voit par la table suivante Nombre des couples mariés et nombres des naissances.

	Nombre total des habitants	Nombre des couples mariés	Nombre annuel des naissances	Le même nombre d'après la proport.	Nombre annuel des déces
Crommenie	2416	460	122	122	120
De Rijp	1870	388	95	95	97
Wijk-op Zee	578	129	30	29	30
Spaarndam	350	72	17	18	19

On a calculé le nombre annuel des décès en prenant la moyenne des 10 dernières années pour Crommenie, des sept dernières années pour De Rijp, des huit dernières années pour Wijk-op-Zee et

1) En Irlande le nombre des catholiques, comparé avec celui des protestants, est encore plus grand: on y a compté récemment 105494 familles protestantes et 281423 familles catholiques.

des 10 dernières années pour Spaarndam. — Le nombre des couples mariés dans ces villages est égal à la cinquième partie environ du chiffre de la population. Autant de fois qu'il y a 4 couples mariés, autant de fois un enfant naît annuellement, y compris les enfants naturels. Sept enfants légitimes naissent annuellement de 29 couples mariés.

Veufs et veuves.

Le nombre des veufs et des veuves dépend dans une certaine mesure de celui des couples mariés, puisque les veufs et les veuves en proviennent par la mort d'un des deux époux. Mais comme on ne se marie pas partout au même âge, et comme le nombre des veufs et des veuves qui se remarient est plus grand en un endroit qu'en un autre, tant à cause de l'abondance plus ou moins grande des moyens de vivre que pour d'autres raisons, il est possible que le rapport du nombre des veufs et des veuves à celui des couples mariés ou celui des veufs et des veuves entre eux est fort variable. D'après KING, il y aurait à Londres 50 veufs et 175 veuves contre 462 couples mariés. Mais ne seraient-ce pas là des nombres trouvés d'après des hypothèses? Il faut observer qu'ils diffèrent énormément de ceux qu'on a trouvés pour Crommenie et pour De Rijp.

Il y a plus d'enfants dans les villages que dans les villes.

Le fait que dans les villages il y a plus d'enfants que dans les villes par rapport au nombre de la population ne s'explique pas, me semble-t-il, par une plus grande fécondité des femmes qui habitent les villages, comme d'aucuns l'ont supposé. Je pense que 100 mariages dans une grande ville fourniront environ le même nombre d'enfants que 100 mariages dans des villages, pourvu que les époux aient le même âge dans l'un et l'autre cas: l'abondance des enfants dans les villages provient de ce qu'il y a là plus de couples mariés, par rapport au nombre des habitants, que dans les villes. C'est là aussi la cause pour laquelle le nombre annuel des décès est plus grand dans les villages que dans les villes.

Nombre des habitants des villages et de la campagne de Hollande.

On se contentait jusqu'à présent d'évaluer grossièrement le nombre des habitants des villages et de la campagne de Hollande, de sorte que les résultats s'écartaient beaucoup de la réalité. Les dénombrements précédents permettent, à mon avis, de déterminer beaucoup mieux ce nombre. En 1732 on a compté 72351 maisons et autres édifices dans tous les villages et à la campagne de la province de Hollande; mais comme les magasins, les serres et d'autres édifices sans habitants sont compris dans ce chiffre,

j'évalue à 69000 le nombre des maisons habitées dans les villages et à la campagne: si ce dernier nombre est trop grand ou trop petit, on peut corriger d'après le nombre qu'on préfère les chiffres qui suivent. — En considérant les maisons de Crommenie et de De Rijp et le nombre de leurs habitants, je trouve qu'en moyenne il y a 87 personnes dans 20 maisons et que 10 familles sont composées de 37 personnes. On pourrait donc jusqu'à nouvel ordre ou jusqu'à ce qu'on parvienne à compter réellement le nombre des habitants 1) prendre les chiffres suivants.

C'est avec intention que je n'ai écrit que des multiples de 1000; il n'est pas encore possible de donner des nombres plus exacts. J'ai déterminé le rapport du nombre d'hommes à celui des femmes en partant des données de Crommenie et de De Rijp; mais il se peut que le nombre des femmes surpasse celui des hommes encore plus fortement.

	69000	maisons habitées,
	81000	familles,
A-peu-près	60000	couples mariés,
	9000	veufs,
	13000	veuves,
	77000	enfants en-dessous de 10 ans,
	300000	personnes en tout,
	145000	hommes,
	155000	femmes,
Un peu plus de	70000	hommes propres au service militaire,
,, ,, moins ,,	15000	naissances par an,
,, ,, plus ,,	4000	mariages par an.

Le nombre des habitants des villages et de la campagne peut aussi être déterminé approximativement de la manière suivante: le nombre total des maisons, des jardins et des édifices en général, habités ou non, tel qu'il a été trouvé à Schagen, à Crommenie,

1) En 1707 on a compté dans l'électorat de Saxe, à la campagne, 2326[illegible]07 personnes, et dans les villes 849896 personnes, à l'exception des savants (,,Géographie moderne'' par ABRAHAM DU BOIS, § 1, p. 266). Le même auteur dit que le nombre des hommes âgés de 18 à 40 ans était de 1800832, mais ce nombre est trop grand. Il faut certainement y biffer le chiffre 1, et même alors ce nombre exprime celui des hommes entre 18 ans et un nombre d'années un peu inférieur à 60. Le nombre des églises est de 13978.

à De Rijp, à Broek-in-Waterland et à Spaarndam est de 1900. Or, on y a compté 7951 personnes. D'après le rapport de ces deux nombres il devrait y avoir un peu plus de 300000 habitants dans 72351 maisons, y compris les édifices non habités; ce qui s'accorde avec nos résultats antérieurs. Si l'on admet que dans tout le royaume de Prusse le rapport du nombre annuel des naissances à celui de la population entière est égal au rapport trouvé dans les villages nommés, on trouverait environ 1600000 habitants dans ce royaume. Mais puisqu'il semble qu'on doive pour les villes multiplier le nombre des naissances par un plus grand facteur pour trouver le chiffre de la population, il est probable que le nombre des Prussiens est encore plus grand. L'expérience serait seule capable de nous montrer s'il en est réellement ainsi.

Population d'Amsterdam d'après MAITLAND.

M. MAITLAND qui compare Amsterdam à Londres, calcule le nombre des habitants en partant de la mortalité telle qu'elle a été pendant 9 années, de 1728 à 1736 inclusivement. D'après ce calcul il y aurait à Amsterdam 217313 habitants 1). Mais si l'on part du nombre des décès pendant les 9 dernières années, de 1730 à 1738, on ne trouvera d'après cette règle qu'un nombre de 207000 habitants à-peu-près. A défaut de données plus précises, on ne peut donc trouver le chiffre exact.

Evaluation du nombre des habitants des villes.

Quant au nombre des habitants de toutes les villes de la Hollande ou de chaque ville séparément, on devra se procurer des statistiques plus détaillées pour en parler avec certitude; mais d'après une évaluation sommaire pour chaque ville séparément, il me semble que le nombre des habitants des villes est environ deux fois plus grand que celui des villages et de la campagne; et je crois pouvoir dire que le nombre annuel des naissances dans toutes ces villes est de 23000 environ.

Quant à l'augmentation du nombre des habitants de toute la terre, on pourrait se figurer que dans les premiers temps, lorsque le nombre des hommes était encore petit, l'augmentation était plus rapide qu'aujourd'hui, soit que les hommes d'alors vivaient plus longtemps soit qu'il y avait alors moins de fortes mortalités ou que les deux causes, et d'autres encore, agissaient simultanément. Actuellement le nombre des hommes qui habitent la terre paraît demeurer à-peu-près constant. Il est vrai que GRAUNT 2)

1) „The History of London", Book 3. Political Account, p. 549.

2) Natur. and Polit. Observ. 46ième article du régistre.

arrive à la conclusion qu'en Angleterre, à la campagne, la population est doublée en 280 années et à Londres en 70 ans environ. Mais je crois que cela n'est pas certain et que ce résultat ne peut pas être considéré comme confirmé par l'expérience. De plus les dénombrements faits en France font voir le contraire.

Multa quidem detecta, sed quam plurima
Posteris sunt relicta.

Fin.

DÉCOUVERTES PLUS DÉTAILLÉES CONCERNANT L'ÉTAT DU GENRE HUMAIN, BASÉES SUR DES EXPÉRIENCES.

Introduction.

Je me suis efforcé il y a plusieurs années à faire quelques progrès dans la connaissance de l'état du genre humain, parce que cette science me semblait fort utile. Je me suis servi à cet effet des auteurs qui ont écrit sur ces matières, du moins de ceux qui m'étaient connus; je me suis basé également sur ma propre expérience. C'était ma conviction qu'on ne doit partir que de l'expérience. Mais à cette époque je n'étais en possession que d'un petit nombre de statistiques. Je me suis donné beaucoup de peine pour en obtenir d'autres, et à la fin je suis parvenu à en posséder un nombre assez considérable que je publie dans ce traité. La raison pour laquelle je communique ce traité aux amateurs de cette science est la suivante: il est fort probable qu'on peut tirer de ces statistiques d'autres conclusions encore que celles auxquelles je suis parvenu. Il ne faut pas croire, en effet, que la chose a déjà été menée à bonne fin. Au contraire, l reste encore beaucoup de questions à examiner et j'engage ceux qui en ont le désir et l'occasion de s'en occuper. Je donne même des relations qui paraissent contraires à quelques-unes de mes conclusions, afin que d'autres amateurs examinent ces questions plus à fond. Je puis déclarer que dans ce traité je n'ai cherché que la vérité: quoiqu'on fasse pour la cacher, elle finit par réapparaître avec plus d'éclat.

Ce qui m'étonne c'est qu'on ait fait si peu de progrès dans la connaissance de l'état du genre humain, alors qu'on a fait depuis un grand nombre de siècles des découvertes dans le domaine des sciences et des arts. Et pourtant, cette connaissance est nécessaire, surtout aux princes et aux autres personnes de qualité qui gouvernent le peuple. Je pourrais à l'appui de cette affirmation donner plusieurs

exemples, mais j'ai des raisons pour m'en abstenir. A présent on estime au petit bonheur le chiffre de la population, celui des familles, des gens mariés, des veufs, des veuves, etc. alors qu'on pourrait connaître exactement, ou peu s'en faut, sans dénombrement, le chiffre de la population dans les villes et les villages, son augmentation et sa diminution, et d'autres particularités, par les relevés ordinaires seuls, si l'on possédait des principes justes. Chez les anciens je n'ai trouvé aucun détail important qui puisse servir à ce genre de recherches. On ne saurait pas trop se fier non plus aux relevés des auteurs modernes, vu qu'il faut s'y prendre très-prudemment si l'on veut déduire des statistiques de l'étranger, ou même de celles de notre patrie, certains principes qui puissent servir de règles fondamentales. En premier lieu il faut avoir la certitude que ces statistiques ont été dressées par des personnes dignes de confiance; en second lieu, il faut savoir dans quel but et de quelle façon les relevés ont été faits; troisièmement s'il n'a pas été possible de supprimer des personnes ou des familles, quand il s'est agi d'un recensement en vue d'un impôt quelconque; en quatrième lieu, si quelques personnes n'ont pas été comptées parmi le chiffre des personnes dénombrées, grâce à certains privilèges, ou pour d'autres raisons; en cinquième lieu il faut avoir la certitude que le nombre des personnes est assez élevé et que, quand on se base sur la statistique des naissances et des décès, on a pris du moins la moyenne de plusieurs années successives; pourtant se ne sont pas là toutes les difficultés encore qu'on rencontrera en faisant cette recherche.

Si les princes, chacun dans son pays, avaient fait compter de temps en temps la population des villes et des villages (séparément pour chaque localité) ainsi que celle de la campagne, en y distinguant toutes les catégories dont il faut connaître le nombre pour être au courant de l'etat du genre humain, on pourrait s'en faire un jugement mieux fondé. A présent on doit se contenter des quelques statistiques qu'on possède et qui proviennent de quelques villes ou villages; et quand même on est persuadé que les dénombrements ont été faits correctement, on voit cependant qu'en général plusieurs chiffres qu'on voudrait connaître y manquent, de sorte qu'on se voit empêché de trouver dans tout un état ou royaume les rapports entre le nombre total des habitants et les nombres annuels des naissances et des décès d'après la

moyenne des nombres correspondants pour quelques villes ou villages. (Si ces rapports restent à-peu-près invariables pour un état, je les désignerai dans la suite sous le nom d'ordre universel.) Pour différentes raisons les rapports nommés ne sont pas les mêmes dans une ville que dans une autre; il y a même souvent une grande différence entre deux villages situés l'un près de l'autre. On est encore loin d'y voir clair. La société est si admirablement constituée et les hommes sont si merveilleusement mêlés qu'il faudra bien du temps pour débrouiller cet écheveau. Toutes les fois qu'on fait, pour ainsi dire, un pas en avant, il faut s'arrêter longtemps, faute d'expérimentations. Pour le moment il suffit que l'on réussisse à vaincre quelques difficultés; nous avançons, il est vrai, mais ce n'est que lentement. SÉNÈQUE, parlant des découvertes en matière de physique, a très bien dit: »La Nature ne découvre pas brusquement ses secrets. Nous croyons avoir déjà pénétré assez avant dans son temple, et pourtant nous ne nous sommes arrêtés qu'à l'entrée. Ces secrets ne se révèlent pas à tout le monde, au premier venu, mais ils sont cachés et enfermés dans un sanctuaire reculé. On en découvrira quelques-uns de nos jours, et ce n'est que la postérité qui en découvrira d'autres". 1)

On pourrait, il est vrai, se contenter à présent de rassembler des observations. Cependant, pour en fair dès maintenant un usage utile, on peut se servir, en guise d'hypothèses, des meilleures conclusions qu'on en peut tirer et s'y tenir jusqu'à nouvel ordre.

Si nous ignorons encore à ce point l'ordre universel, c'est qu'il y a parfois une si grande diversité de communautés religieuses, ce qui fait qu'on n'est pas à même de connaître assez exactement le nombre des naissances et des décès. Ceci s'applique surtout aux données concernant l'Angleterre. Je crois avoir été le premier qui ait fait compter la population de quelques villages, afin de tirer de ces recensements quelques conclusions à l'égard du genre humain. En 1739, j'ai fait le dénombrement de la population de 5 villages, avec une population totale de 5214 âmes 2). Depuis lors je me suis efforcé de me procurer les résultats des dénombrements d'autres villages, j'y ai réussi et j'en reproduis ici les résultats. Ces recensements ont été effectués avec un soin extrême,

---

1) ,,Natur. Quaest". Lib. 7 pag. 761. Anvers, 1605.

2) ,,Appendice aux hypothèses sur l'état de l'espèce humaine" p. 240—245.

non pas pour gagner de l'argent, mais par amour de la science, par des personnes que je nomme ici, et tout cela *en secret;* les recenseurs ignoraient eux-mêmes à quoi cela servirait, mais j'en ai donné une explication à quelques-uns d'entre eux, après avoir reçu leurs notes. Par là les observations ne sont pas partiales ni faites pour favoriser quelque système; car je n'ai pas même de système bien fondé jusqu'ici. Je ferai suivre ici les chiffres qu'on m'a communiqués et les remarques auxquelles ils m'ont donné lieu.

PREMIÈRE PARTIE.

Recensement des habitants de quelques villages et conclusions générales déduites de ce recensement.

Nombre des habitants des villages Grosthuizen, Avenhorn et Scharwoude.

Ces trois villages sont situés l'un près de l'autre. Scharwoude et Grosthuizen se touchent, Avenhorn est à une petite distance. Les deux derniers villages n'ont qu'un seul pasteur protestant. Au commencement du mois de Septembre 1742 KLAAS HAM, maître d'école et chantre à Grosthuizen, a compté exactement et pour la première fois le nombre des habitants de ces trois villages.

Grosthuizen.

Dans ce village il trouva 52 maisons habitées par 56 familles. à savoir 14 familles réformées et 42 familles catholiques. Les chiffres des diverses catégories d'habitants étaient les suivants.

Réformés.

Hommes mariés	7	Femmes mariées	7
Veufs	1	Veuves	2
Célibataires au-dessus de 20 ans	1	Demoiselles au-dessus de 20 ans	0
Célibataires de 10 à 20 ans	0	Demoiselles de 10 à 20 ans	6
Garçons en-dessous de 10 ans	11	Filles en-dessous de 10 ans	5
		Servantes au-dessus de 20 ans	2
Hommes...	20	Femmes...	22

Catholiques.

Hommes mariés	26	Femmes mariées	26
Veufs	5	Veuves	12
Célibataires au-dessus de 20 ans	9	Demoiselles au-dessus de 20 ans	7
Célibataires de 10 à 20 ans	17	Demoiselles de 10 à 20 ans	15
Garçons en-dessous de 10 ans	24	Filles en-dessous de 10 ans	21
		Servantes au-dessus de 20 ans	1
Hommes...	81	Femmes...	82

Le nombre total des habitants de ce village était donc de 205.

Les nombres des décès depuis le premier Janvier de l'année 1724 jusqu'au premier Septembre de l'année 1742 ont été les suivants.

Réformés.

Epoux	6	Epouses	9
Veufs	0	Veuves	1
Garçons de 4 à 10 ans...	5	Filles de 4 à 10 ans	6
Garçons en-dessous de 4 ans	6	Filles en-dessous de 4 ans	5
Hommes...	17	Femmes...	21

Catholiques.

Epoux	26	Epouses	25
Veufs	8	Veuves	13
Célibataires âgés	2	Vieilles demoiselles	1
,, au-dessus de 20 ans	2	Demoiselles au-dessus de 20 ans	1
Célibataires de 10 à 20 ans	13	Demoiselles de 10 à 20 ans	4
Garçons de 4 à 10 ans...	27	Filles de 4 à 10 ans	10
,, en-dessous de 4 ans	36	,, en-dessous de 4 ans	34
Hommes...	114	Femmes...	88

Le nombre des décès est de 240 pour les adhérents des deux religions; ce qui fait annuellement 13, en moyenne.

Les nombres des naissances depuis le premier Mars 1737 jusqu'au premier Septembre 1742 sont les suivants:

Réformés.	Catholiques.
8 Garçons	26 Garçons
4 Filles	22 Filles

Du premier Janvier 1724 jusqu'au premier Janvier 1742, 28 couples se sont mariés dans l'église et 40 devant le tribunal. Parmi ceux-ci 18 époux et 26 épouses venaient de l'étranger.

Avenhorn.

Ce village comprenait 44 maisons dont 2 étaient vides et 42 habitées, et 2 moulins également habités. Il y avait là 50 familles, à savoir 26 familles réformées et 24 familles catholiques.

Réformés.

Hommes mariés	19	Femmes mariées	19
Veufs	2	Veuves	6
Célibataires et garçons au-dessus de 10 ans	17	Demoiselles et filles au-dessus de 10 ans	7
Garçons en-dessous de 10 ans	3	Filles en-dessous de 10 ans	13
Serviteurs	4	Servantes	5
Hommes...	45	Femmes...	50

Catholiques.

Hommes mariés	10	Femmes mariées	10
Veufs	6	Veuves	6
Célibataires et garçons au-dessus de 10 ans	15	Demoiselles et filles au-dessus de 10 ans	14
Garçons en-dessous de 10 ans	10	Filles en-dessous de 10 ans	7
Serviteurs	3	Servantes	3
Hommes...	44	Femmes...	40

Le nombre total des habitants du village est donc de 179.

Les nombres des décès depuis le premier Janvier 1738 jusqu'au 16 Septembre 1742 (il n'a pas été possible d'obtenir les nombres relatifs à d'autres années) ont été les suivants.

Parmi les réformés: 2 hommes mariés, 2 femmes mariées, 2 célibataires et une demoiselle au-dessus de 20 ans et encore 7 enfants en-dessous de 10 ans: 14 en tout. Parmi les catholiques: 5 hommes mariés et 3 femmes mariées et encore 6 enfants en-dessous de 10 ans, donc aussi 14 en tout ou 3 par an en moyenne.

Le nombre des mariages, depuis le premier Janvier 1736 jusqu'au 16 Septembre 1742, a été de 9 parmi les réformés et de 4 parmi les catholiques.

Les nombres des naissances, du premier Janvier 1737 jusqu'au premier Septembre 1742, ont été les suivants.

Réformés	Catholiques
17 Garçons	7 Garçons
13 Filles	5 Filles.

Scharwoude.

Il y avait dans ce village 45 maisons habitées par 36 familles réformées, 10 familles catholiques, une veuve mennonite et un célibataire au-dessus de 20 ans; le nombre total des habitants était de 158, savoir

Réformés

Hommes mariés	25	Femmes mariées	25
Veufs	2	Veuves	8
Célibataires au-dessus de 20 ans	6	Demoiselles au-dessus de 20 ans	5
Célibataires de 10 à 20 ans	12	Jeunes filles de 10 à 20 ans	16
Garçons en-dessous de 10 ans	11	Filles en-dessous de 10 ans	19
Hommes...	56	Femmes...	73

Catholiques

Hommes mariés	7	Femmes mariées	7
Veufs	2	Veuves	2
Célibataires au-dessus de 20 ans	1	Demoiselles au-dessus de 20 ans	2
Célibataires de 10 à 20 ans	1	Jeunes filles de 10 à 20 ans	2
Garçons en-dessous de 10 ans	2	Filles en-dessous de 10 ans	1
Hommes...	13	Femmes...	14

Parmi les réformés 6 hommes, 6 femmes, 1 célibataire et 2 demoiselles, tous au-dessus de 10 ans, sont morts entre le premier Octobre 1737 et le premier Septembre 1742; parmi les catholiques entre les mêmes dates 2 hommes et 1 célibataire au-dessus de 10 ans. De plus 16 enfants réformés ou catholiques. Cela fait 34 personnes en tout, donc 7 par an, en moyenne.

Entre le premier Mars 1737 et le premier Septembre 1742 sont nés

13 garçons, 9 filles } chez les réformés, 4 garçons, 5 filles } chez les catholiques.

Entre le premier Octobre 1737 et le premier Septembre 1742, 9 couples se sont mariés dans l'église et 3 devant le tribunal.

Comme ces trois villages sont petits et qu'ils sont situés à peu de distance l'un de l'autre, je prendrai la somme des nombres pour les trois villages. Il y avait donc

Hommes mariés..........	94	Femmes mariées.........	94
Veufs	18	Veuves	37
Célibataires au-dessus de 10 ans.................	80	Demoiselles au-dessus de 10 ans................	74
Garçons en-dessous de 10 ans	61	Filles en-dessous de 10 ans	66
Serviteurs	7	Servantes...............	11
Hommes...	260	Femmes...	282

Nombre total des habitants: 542.

Le nombre annuel des naissances a été de 23 pour les trois villages. Le nombre total des habitants est donc au nombre annuel des naissances comme un peu plus de $23\frac{1}{2}$ est à 1.

Le nombre des habitants a été au nombre annuel des décès comme 16 est à 1 environ dans le village de Grosthuizen. La mortalité y a donc été plus forte que dans les deux autres villages; probablement cela est dû soit à un plus grand nombre de décès pendant l'année 1727, année à laquelle la statistique des deux autres villages ne se rapporte pas, soit à ce qu'on a enterré à Grosthuizen des personnes mortes ailleurs. A Avenhorn le nombre des habitants a été au nombre annuel des décès comme $22\frac{5}{8}$ est à 1, tandisque pour Scharwoude ces deux nombres étaient dans le rapport de $22\frac{4}{7}$ à 1. Dans les trois villages ensemble le nombre des habitants a été au nombre annuel des décès comme un peu plus de $19\frac{1}{3}$ est à 1.

Nombre des habitants du village de Schardam.

Ce nombre a été compté par PIERRE JUFFER, qui a compté également le nombre des habitants d'Etersheim.

A Schardam il trouva 26 maisons habitées par 30 familles comprenant les personnes suivantes.

Hommes mariés	19	Femmes mariées	19
Veufs	2	Veuves	9
Célibataires au-dessus de 10 ans	19	Demoiselles au-dessus de 10 ans	15
Garçons en-dessous de 10 ans	20	Filles en-dessous de 10 ans	15
Hommes...	60	Femmes...	58

Nombre total des habitants: 118.

Nombre des habitants du village de Beets.

Le 11 Août 1741 JACQUES UITGEEST a compté exactement le nombre des habitants de ce village. Il y a trouvé 82 maisons, habitées par 88 familles, comprenant 56 couples mariés, 13 veuves et 9 veufs, donc en tout 273 personnes.

Nombre des habitants du village de Hobrede.

SYBRAND HAAS, bourgmestre de Kwadijk, a compté ce nombre le 21 Février 1743 d'après les données fournies par les habitants de chaque maison. Il y trouva 19 maisons habitées par 14 familles réformées, 3 familles luthériennes, 1 famille mennonite et 1 famille catholique. Ces familles se composaient de

Hommes mariés	9	Femmes mariées	9
Veufs	3	Veuves	4
Célibataires au-dessus de 10 ans	10	Demoiselles au-dessus de 10 ans	4
Garçons en-dessous de 10 ans	11	Filles en-dessous de 10 ans	3
Serviteurs	3	Servantes	4
Hommes....	36	Femmes....	24

Nombre total des habitants: 60.

Nombre des habitants du village de Etersheim.

PIERRE JUFFER, maître d'école et chantre à Schardam et à Etersheim, a compté, le 22 Août 1743, aussi exactement que possible, le nombre des habitants de ce dernier village. Il y avait là 26 maisons habitées par 33 familles composées de

Hommes mariés	23	Femmes mariées	23
Veufs	7	Veuves	2
Célibataires au-dessus de 10 ans	21	Demoiselles au-dessus de 10 ans	19
Garçons en-dessous de 10 ans	12	Filles en-dessous de 10 ans	14
Hommes	63	Femmes	58

Nombre total des habitants: 121.

Nombre des habitants du village de Oosthuizen.

Une statistique de ce village, situé sur le Beemster, a été faite le 12 Juin 1741 par MAARTEN OOSTWOUD. Il y trouva 109 maisons habitées par 111 familles, à savoir 105 familles réformées et 6 familles mennonites. Le nombre total des habitants était de 472, savoir

Hommes mariés	80	Femmes mariées	81
Veufs	28	Veuves	20
Célibataires au-dessus de 10 ans	62	Demoiselles au-dessus de 10 ans	52
Garçons en-dessous de 10 ans	53	Filles en-dessous de 10 ans	61
Serviteurs	15	Servantes	20
Hommes	238	Femmes	234

On m'a communiqué les nombres des enfants baptisés depuis 1665 jusqu'en 1742 inclusivement; toutefois pour ne pas être trop long je ne donnerai pas ces nombres pour chaque année séparément, mais je les ajouterai pour quelques années.

Nombre des baptisés chez les réformés.

	Garçons	Filles	Somme	Couples mariés
Depuis 1665 jusqu'à 1672 incl.	120	98	218	75
,, 1673 ,, 1680 ,,	131	110	241	78
,, 1681 ,, 1688 ,,	102	119	221	94
,, 1689 ,, 1696 ,,	81	85	166	51
En 32 ans	434	412	846	298
Depuis 1697 jusqu'à 1721	235	237	572	
En 57 ans	669	649	1418	

Le nombre des habitants de ce village paraît diminuer depuis 1688. La place de pasteur y a été souvent vacante depuis 1696 et alors on a fait baptiser ses enfants ailleurs; en 1703 pas un seul enfant n'a été baptisé à Oosthuizen. De pareilles années ne peuvent pas entrer en ligne de compte. Pendant 11 ans, de 1722 à 1732 inclusivement, 94 garçons et 74 filles, 168 enfants en tout, y ont été baptisés.

Les régistres des enterrements qu'on m'a envoyés commencent par l'année 1722. Depuis cette année jusqu'à l'année 1732, donc pendant 11 ans, 259 personnes y ont été enterrées, parmi lesquelles 52 habitants du Beemster. Pendant la dernière année 25 personnes ont été enterrées, parmi lesquelles 3 provenant du Beemster.

De 1733 à 1742 inclusivement, 104 garçons et 76 filles, 180 enfants en tout, ont été baptisés chez les réformés. Pendant le même temps 194 habitants d'Oosthuizen et 25 du Beemster, 219 en tout, ont été enterrés.

Aux 180 baptisés que j'ai mentionnés j'en ajoute encore 5 qui probablement sont morts avant le baptême. Comme 185 enfants naissent en 10 ans de 105 familles, 10 enfants doivent naître pendant ce temps de 6 familles. En 10 ans le nombre des naissances sera donc de 195; et en 2 ans de 39. Le nombre des habitants est donc au nombre annuel des naissances dans le rapport $24\frac{1}{5} : 1$.

Pendant les 10 années considérées 194 habitants d'Oosthuizen ont été enterrés. En y ajoutant encore 22 pour l'année 1732, je trouve 216 pour le nombre des décès pendant 11 ans. Par conséquent le nombre des habitants a été au nombre annuel des décès comme 24 est à 1 environ. 1)

1) Nous avons omis les statistiques semblables à celles qu'on vient de lire qui se rapportent à une soixantaine de villages hollandais.

Ces villages ou hameaux sont les suivants: Kwadijk, Middelie, Axwijk, Warder, Jisp, Purmer, Wijde Wormer, Neck, Beemster, Wormer, Crommenie, Crommeniedijk, Zaan, Wormerveer, Zaandijk, Koog, Westzaanen, Westzaandam, Oostzaandam, Oostzaanen, Ilp, Purmerland, Ilpendam. Watergang, Zunderdorp, Nieuwendam, Buiksloot, Broek, environs de Monnikendam, Volendam, Uitdam, Holisloot, Schellingwoude, Hem, Wijdenes, Westwoude, Binnewijzend, Oosterblokker, Westerblokker, Zwaag (avec Bangerd, Zwaagdijk et Keern), Oostwoud, Hauwert, Nibbixwoud, Midwoud, Opperdoes, Sybekarspel, Benningbroek, Twisk, Westgraftdijk, Heylo, Bloemendaal,

Nombre des habitants du village de Critsum près d'Embden.

Ce village est à deux lieues de la ville d'Embden sur l'Eems. Le nombre des habitants m'a été fourni par SYMON PANSER,

---

Schagen, Loenen, Vreeland, Benskop, Schipluyden, Boskoop, West-ter-Schelling.

Les conclusions générales tirées de ces statistiques (p. 267) doivent intéresser le lecteur plus que les statistiques elles-mêmes.

Les deux tableaux suivants méritent cependant d'être mentionnés :

Crommenie ....

Age	Hommes	Femmes	Somme
De 0 à 10 ans	305	319	624
„ 10 à 20 „	229	220	449
„ 20 à 30 „	183	209	392
„ 30 à 40 „	173	191	364
„ 40 à 50 „	154	184	338
„ 50 à 60 „	74	59	133
„ 60 à 70 „	32	27	59
„ 70 à 80 „	8	10	18
„ 80 à 90 „	3	1	4
	1161	1220	2381

Westzaandam ....

Age	Hommes	Femmes	Somme
De 0 à 5 ans			1630
„ 5 à 10 „			92
„ 10 à 15 „			47
„ 15 à 20 „	21	19	40
„ 20 à 25 „	40	90	130
„ 25 à 30 „	41	107	148
„ 30 à 35 „	33	99	132
„ 35 à 40 „	53	89	142
„ 40 à 45 „	57	84	141
„ 45 à 50 „	48	55	103
„ 50 à 55 „	62	55	117
„ 55 à 60 „	58	78	136
„ 60 à 65 „	49	70	119
„ 65 à 70 „	42	62	104
„ 70 à 75 „	40	58	98
„ 75 à 80 „	31	47	78
„ 80 à 85 „	23	25	48
„ 85 à 90 „	6	12	18
„ 90 à 95 „	1	3	4
„ 95 à 100 „	0	1	1
	605	954	3328

(N. d. tr.)

mathématicien officiel de cette ville; c'est son frère M. PANSER, pasteur à Critsum, qui a compté exactement ce nombre dans le mois d'Août de l'année 1742. Il y trouva 43 maisons habitées par 52 familles, comprenant les personnes suivantes

Hommes mariés	43	Femmes mariées	43
Veufs	4	Veuves	15
Célibataires au-dessus de 10 ans	20	Demoiselles au-dessus de 10 ans	25
Garçons en-dessous de 10 ans	29	Filles en-dessous de 10 ans	21
Serviteurs	13	Servantes	16
Hommes...	109	Femmes...	120

Nombre total des habitants: 229.

De 1729 à 1741 inclusivement, donc pendant 13 ans, 129 enfants y ont été baptisés, 49 couples s'y sont mariés et 90 personnes y sont mortes.

On peut donc dire que 132 enfants y sont nés en 13 ans, et par conséquent que le nombre total des habitants est au nombre annuel des naissances environ comme $22\frac{1}{2}$ est à 1, et au nombre annuel des décès (d'après la moyenne des 8 dernières années) comme 28 ou 29 est à 1.

Parmi 60 ou 61 personnes deux se marient chaque année. La durée moyenne des mariages est de 11 à 12 ans. Dix enfants naissent annuellement, en moyenne, de 43 couples mariés.

Nombre des habitants de Rysum près d'Embden.

A la demande de SYMON PANSER, mathématicien officiel de la ville d'Embden, on a compté exactement en 1740 le nombre des habitants de la seigneurie de Rysum située dans le „Kromme Horn" à 3 lieues de la ville, près de la bouche de l'Eems. Ce dénombrement a été fait par ANDREAS ANDREASZ., maître d'école en cet endroit. Il y trouva 108 maisons habitées par 501 personnes, savoir 106 hommes, 127 femmes, 51 jeunes gens, 36 jeunes filles et 181 enfants. Parmi ce nombre il y avait 99 couples mariés. En 12 ans, de 1728 à 1739, 294 personnes y sont mortes; ce qui fait en moyenne 49 tous les deux ans. Le nombre total

des habitants est donc au nombre annuel des décès comme $20\frac{1}{2}$ est à 1. Pendant les 5 dernières années 102 enfants y ont été baptisés, de sorte que le nombre annuel des naissances est de 21 en moyenne. Le nombre des habitants est donc au nombre annuel des naissances comme $23\frac{3}{4}$ est à 1 environ.

M. WASSENIUS a donné une liste des naissances, des mariages et des décès dans la paroisse de Wassende durant 20 ans; cette liste fait voir que le nombre des naissances y est à-peu-près égal à celui des décès. Le nombre des habitants de la paroisse paraît augmenter quelque peu et l'on remarque que la vingtième partie environ de la population y meurt annuellement. J'ai consulté là-dessus les Mémoires de l'Académie Royale de Suède 1).

Nombre des habitants de Stoke-Damarell en Angleterre.

Le dénombrement a été fait en 1733 vers la St. Michel. On trouva alors 3361 personnes dans toute cette paroisse 2). J'avais demandé à M. le docteur CROMWEL MORTIMER, sécrétaire de la Société Royale anglaise, de me communiquer les nombres des baptêmes et des décès durant 10 années, 5 avant et 5 après la date du dénombrement de la paroisse. M. MORTIMER a écrit à ce sujet au révérend W. BARLOW, pasteur en cet endroit, lequel a envoyé à Londres les régistres demandés; je les ai reçus dans une lettre du 21 Février 1744 Nouveau Style, dont voici un extrait.

---

1 Voir „The Gentlemans Magazine", Mars 1749.

2 Philos. Trans. No. 439, p. 171.

Année	Baptêmes Garçons Eglise anglicane	Dissenters	Somme	Filles Eglise anglicane	Dissenters	Somme	Décès Hommes	Femmes
1728	44	—	44	46	1	47	54	54
1729	66	1	67	54	—	54	113	125
1730	51	—	51	42	1	43	45	30
1731	58	—	53	66	1	67	39	47
1732	46	—	46	63	—	63	35	46
1733	61	2	63	61	1	62	36	26
1734	55	—	55	49	—	49	86	85
1735	75	—	75	78	—	78	102	98
1736	57	—	57	57	—	57	43	39
1737	79	—	79	79	—	79	48	49
1738	70	—	70	60	3	63	64	42
	657	3	660	655	7	662	665	641

Nombre total des baptêmes: 1322. Des décès: 1306.

La première colonne comprend, outre les garçons baptisés dans l'église anglicane, 5 ou 6 fils de Quakers baptisés par M. BARLOW. La deuxième colonne comprend les enfants baptisés chez tous les autres dissenters, et le même chose est vraie pour la colonne correspondante des filles. On pourrait se demander, en tenant compte des anabaptistes qui peuvent s'y trouver ainsi que des Quakers, si le nombre des enfants nés vivants ne doit pas être plus grand que celui des enfants baptisés. Quelquefois aussi un cadavre provenant de cette paroisse est transporté dans une autre paroisse pour y être enterré; c'est le cas pour 4 ou 5 cadavres par an. Il arrive aussi qu'on y enterre des cadavres provenant de vaisseaux à l'ancre sur la rivière; leur nombre ne doit pas beaucoup différer du nombre précédent. Les enfants baptisés proviennent presque tous d'habitants de la paroisse. Le nombre des maisons ainsi que celui des habitants de Stoke-Damarell s'est considérablement accru depuis quelques années car bien des familles étrangères sont venu s'y fixer. Quoique le nombre des habitants soit ainsi devenu plus grand, il n'en est pas de même pour le nombre des baptêmes indiqués dans le régistre; car les enfants de ces familles étrangères ont souvent été portés non pas sur les régistres de Stoke-Damarell, mais sur ceux des endroits habités par ces personnes. Outre ces enfants-là il faudrait encore

ajouter au régistre les enfants morts avant le baptême pour trouver le nombre total des enfants nés dans la paroisse. J'ignore si l'on y attend plus longtemps qu'en Hollande avant de baptiser les enfants. Il est probable que le nombre des couples mariés y est plus petit par rapport à celui des habitants que dans d'autres localités qui restent à-peu-près stationnaires. En effet, c'est ce que l'on constate pour les villes grandes et florissantes, où beaucoup de célibataires vont se fixer, soit pour le service maritime, soit pour l'industrie ou comme domestiques; nous avons plusieurs fois parlé de la différence qui en résulte dans les nombres des décès. Il paraît cependant qu'on peut se faire une idée de l'augmentation de la population en considérant les nombres des baptêmes et des décès. En effet, pendant les 5 années qui précèdent la date du dénombrement 535 enfants en tout ont été baptisés, et 662 pendant les 5 années suivantes. Le nombre des décès a été de 588 pendant les 5 premières années, et de 656 pendant les 5 dernières. Si l'on ne tient aucun compte des remarques précédentes et qu'on se contente de diviser par 11 le nombre total des enfants baptisés qui est de 1322, on trouve qu'annuellement 120 enfants en moyenne y sont baptisés. A ce nombre j'en ajoute 3 à cause de ceux qui meurent avant le baptême. Le nombre total des habitants est donc au nombre annuel des naissances comme $27\frac{1}{3}$ est à 1. Mais, si l'on ne tient pas compte de l'année 1728 où le nombre des baptisés a été si extraordinairement petit, on trouve 123 ou 124 pour le nombre annuel des baptêmes. Et si l'on prend 128 pour le nombre annuel des enfants nés vivants, le nombre des habitants sera au nombre annuel des naissances comme $26\frac{1}{4}$ est à 1. Il est impossible de savoir si l'augmentation proportionnelle de la population a été à-peu-près constante ou bien si elle a eu lieu surtout pendant les dernières années. Si l'on ne tient compte que des cinq dernières années, on voit que le nombre des habitants est au nombre annuel des naissances comme $24\frac{5}{7}$ est à 1. Pendant les 5 dernières années 131 personnes en moyenne sont mortes chaque année; de sorte que le nombre des habitants est au nombre annuel des décès comme un peu moins de $25\frac{1}{2}$ est à 1. Si je possédais autant de données relatives à cette localité que j'en ai pour la plupart des

villages hollandais dont on a fait à ma demande le dénombrement, je pourrais porter là-dessus des jugements plus sûrs. On a publié à Londres en 1750 un ouvrage du docteur THOMAS SHORT intitulé ,,New Observations, natural, moral, civil, political, and medical, on city, town and country. Bills of Mortality" 1). Ce qui me paraît le plus remarquable dans cet ouvrage ce sont les régistres de 7 bourgs et de 54 paroisses; mais je ne sais pas si elles sont plus exactes que celles de Londres. On y trouve ce qui suit.

	Familles	Habitants	Nombre annuel des baptisés	N. a. des mariages	N. a. des décès
Dans 7 bourgs	5978	27043	917	234	830
Dans 54 paroisses . .	4456	19607	659	165	530

On a pris en général la moyenne des nombres qui se rapportent à 10 ou à 12 années, savoir aux années 1730—1740 et aux années avoisinantes. Le nombre total des habitants des villes est au nombre annuel des baptêmes environ comme $29\frac{1}{2}$ est à 1; celui des habitants des villages et de la campagne comme $29\frac{3}{4}$ est à 1. Cependant on ne peut pas se fier à ces nombres. Car il se peut que parmi les baptisés on n'ait pas compté les enfants des dissenters et ceux des catholiques. De même pour les décédés et pour les mariés. L'auteur s'est contenté d'indiquer par une seule lettre, sans y ajouter aucun chiffre, s'il y avait beaucoup, peu ou point de dissenters. Dans la plus grande des 7 bourgs on trouva 14105 habitants et là il n'y avait que peu de dissenters. On ignorait leur nombre pour 2 autres bourgs; dans 3 autres il y en avait quelques-uns et dans le plus petit bourg, habité par 610 personnes seulement, il n'y avait pas de dissenters. Il serait désirable qu'on eût noté séparément les nombres des familles appartenant aux différents cultes, comme je l'ai fait faire pour les villages hollandais. On pourrait alors déterminer approximativement, en se basant sur le nombre des baptisés appartenant au culte principal, celui des baptisés appartenant aux autres cultes, sans faire appel aux livres de baptême des différentes églises ou sans examiner quel a été ce nombre pour ceux qui ne font baptiser

1) Imprime chez LONGMAN et MILLAR. On en trouve un extrait en français par M. MATY, M. D. dans le Journal britannique de Juillet 1750.

leurs enfants que lorqu'ils sont parvenus à l'âge de raison. Outre cette difficulté-ci il y en a encore d'autres mieux connues aux habitants de ces localités qu'à nous. Il est surprenant qu'on ne donne pas les noms des bourgs et des paroisses ; la connaissance de ces noms nous permettrait de nous procurer d'autres renseignements. Les familles (à supposer qu'elles aient toutes été comptées) doivent y être composées d'un plus grand nombre de personnes que celles qui habitent les petites villes ou les villages hollandais. En effet, dans les 7 bourgs 45 familles comprenaient en moyenne 45 personnes et dans les paroisses 44 personnes. Ce serait un beau travail que de construire de bonnes statistiques pour l'Angleterre, pour la France et pour d'autres pays en tenant compte des circonstances qu'il y faut observer.

J'ai donné maintenant les dénombrements relatifs à un grand nombre de villages de la Hollande du Nord et à quelques autres villages hors de cette province lesquels ont été faits à ma demande avec toute l'accuratesse désirable, autant que j'ai pu en juger d'après les remarques qui y étaient ajoutées. On peut trouver dans mon ouvrage antérieur sur l'état du genre humain les données relatives à quelques autres villages dont je me servirai aussi pour en tirer les conclusions générales qui suivent. Je passe à ces conclusions, celles que d'après mon avis on est autorisé de tirer des statistiques dont je dispose.

CONCLUSIONS GENERALES

qu'on peut tirer des statistiques précédentes relatives à quelques villages et à quelques hameaux.

Rapport du nombre de habitants au nombre annuel des naissances.

Le nombre total des habitants des villages suivants : Avenhorn, Boskoop, Broek-in-Waterland, Critsum, Crommenie, Grosthuizen, Hem, Jisp, Ilpendam, Koog, Kwadijk, Landsmeer, Loenen, Nieu-

wendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostzaanen, Oostzaandam, Opperdoes, Purmerland, Rijsum, De Rijp, Schagen, Scharwoude, Schipluyde, Spaarendam, Twisk, Uitdam, Warder, Westgraftdijk, Westerblokker, West-Zaandam, Westzaanen, Wormerveer, Wormer, Wijk-op-Zee, Wijdenes, Zunderdorp et Zwaag est de 40438 d'après les statistiques précédentes, tandisque le nombre annuel des naissances, si l'on prend la moyenne pour plusieurs années, y est de 1781. — Comme le nombre des naissances n'est pas toujours le même, j'ai pris la moyenne pour dix ans dans la majorité des villages ; pour quelques-uns d'entre eux je n'ai pu toutefois obtenir des données relatives à dix années. — Il paraît donc que le nombre des habitants est au nombre annuel des naissances comme $22\frac{2}{3}$ est à 1. Il mérite d'être remarqué que ce rapport est à fort peu près le même pour les 20 premiers villages et pour les 19 derniers, sans que l'on ait placé à ce but leurs noms dans une suite déterminée : ils se suivent dans l'ordre alphabétique. Mais comme dans quelques localités il n'y a pas d'églises, les enfants pour être baptisés sont conduits dans les villages avoisinants. C'est pourquoi aux 40438 habitants des villages nommés j'en ajoute encore 1515 qui ont été comptés dans les villages suivants : Ilp, Nek, Wijde Wormer et Enge Wormer. Le nombre total est alors de 41953. Le nombre annuel des naissances reste le même. Le nombre total des habitants est donc alors au nombre annuel des naissances comme un peu plus de $23\frac{1}{2}$ est à 1. Ce dernier rapport me semble donc exprimer la loi générale.

Rapport du nombre des couples mariés au nombre annuel des naissances.

Dans les villages suivants : Avenhorn, Boskoop, Broek, Critsum, Crommenie, Grosthuizen, Hem, Jisp, Ilpendam, Koog, Kwadijk, Landsmeer, Loenen, Nieuwendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostzaanen, Oostzaandam, Opperdoes, Purmerland, Rijsum, Schagen, Scharwoude, Twisk, Vreeland, Uitdam, Warder, Westgraftdijk, Westerblokker, Westzaanen, Westzaandam, Wormer, Wormerveer, Wijdenes, Zunderdorp et Zwaag, le nombre des couples mariés était de 7236 et le nombre annuel des naissances de 1644. Ce dernier nombre est la moyenne des nombres qui se

rapportent à 10 années pour la plupart des villages. Cinq enfants naissent donc annuellement de 22 couples mariés, ou, si l'on veut, 15 enfants de 66 couples. A Warder il y avait 66 femmes mariées, parmi lesquelles 48 entre 20 et 45 ans, c. à. d. capables quant à l'âge d'avoir des enfants. C'est d'elles que proviennent les 15 enfants. Il s'ensuit que de 16 couples mariés, où les femmes sont âgées de 20 à 45 ans, 5 enfants naissent annuellement dans les villages. Il serait désirable de chercher la vraie valeur de ce rapport en se basant sur des nombres encore plus grands.

Rapport du nombre des habitants au nombre annuel des décès.

A Avenhorn, Binnewijzend, Boskoop, Broek-in-Waterland, Critsum, Crommenie, Grosthuizen, Hem, Jisp, Ilpendam, Koog, Kwadijk, Landsmeer, Loenen, Nieuwendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostzaanen, Oostzaandam, Opperdoes, Purmerland, Rijsum, De Rijp, Schagen, Scharwoude, Schipluyde, Spaarendam, Twisk, Warder, Watergang, Westgraftdijk, West-ter-Schelling, Westerblokker, Westwoude, Westzaandam, Westzaanen, Wormer, Wormerveer, Wijk-op-Zee, Wijdenes, Zaandijk, Zunderdorp et Zwaag on a trouvé pour le nombre total des habitants le chiffre 43213, et pour le nombre annuel des décès le chiffre 2007, de sorte que le nombre des habitants est au nombre annuel des décès comme $21\frac{8}{15}$ est à 1. Toutefois comme on n'enterre pas de cadavres à Purmer, à Ilp, à Wijde Wormer, à Enge Wormer et à Nek, mais qu'on les enterre en général dans les villages avoisinants, et qu'on trouve 1515 habitants dans ces cinq villages, j'ajoute ce nombre au nombre 43213 trouvé plus haut, ce qui donne une somme de 44728 habitants. Le nombre des habitants de tous les villages nommés est donc au nombre annuel moyen des décès comme $22\frac{2}{7}$ est à 1. Le nombre $22\frac{2}{7}$ paraît être quelque peu inférieur au vrai nombre: on n'a tenu compte ni du départ ni de l'arrivée des étrangers. — Quoique le nombre des décès pendant 10 ans surpasse quelque peu celui des naissances, il ne faut pas s'imaginer que ces villages se dépeupleraient sans l'affluence des étrangers; en effet, il y a d'une part des étrangers parmi les morts et d'autre part le nombre des décès pendant 10 ans est loin d'être toujours

le même. Je n'ai demandé les nombres des naissances et des décès que pour dix ans, attendu que lorsqu'on considère les mêmes nombres pour un plus grand nombre d'années, la population peut avoir augmenté ou diminué considérablement.

Rapport du nombre des habitants à celui des couples mariés et au nombre annuel des mariages.

Dans les communes suivantes: Oostzaanen, Wormer, Zwaag, Purmerland, Warder, Nieuwendam, Zunderdorp, Kwadijk, Schagen, Westgraftdijk, Twisk, Oosthuizen, Ilpendam, Westzaandam, Landsmeer, Uitdam, Grosthuizen, Avenhorn, Scharwoude, Hem, Crommenie et Broek-in-Waterland on a compté 25434 habitants parmi lesquels 4969 couples mariés. Le nombre annuel des mariages était de 401. Parmi 64 personnes vivant simultanément deux en moyenne se marient donc chaque année. Les mariages paraissent durer $12\frac{2}{5}$ années en moyenne; en d'autres termes, sur 62 couples mariés, jeunes et vieux, 5 cessent d'exister chaque année par suite de la mort du mari ou de la femme.

Rapport du nombre des habitants à celui des couples mariés, des veufs et des veuves.

On a trouvé que dans les communes suivantes: Axwijk, Avenhorn, Beets, Binnewijzend, Bloemendaal, Boskoop, Broek, Critsum, Crommenie, Enge Wormer, Etersheim, Grosthuizen, Heilo, Hem, Hobrede, Jisp, den Ilp, Ilpendam, Koog, Kwadijk, Landsmeer, Loenen, Middellie, Nek, Nieuwendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostwoud, Oostzaanen, Oostzaandam, Opperdoes, Purmerland, de Rijp, Schagen, Schardam, Scharwoude, Twisk, Vreeland, Uitdam, Warder, Watergang, Westgraftdijk, West-ter-Schelling, Westerblokker, Westwoude, Westzaanen, Westzaandam, Wormer, Wormerveer, Wijde Wormer, Wijdenes, Zaandijk, Zunderdorp et Zwaag, la somme des habitants était de 45298. Le nombre total des couples mariés y était de 8666, outre 10 couples dont le mari et la femme vivaient à part. Le nombre des veufs était de 1430, celui des veuves de 2085.

Les veufs constituent donc à-peu-près la sixième partie des couples mariés: ils sont 33 sur 200 habitants. Le nombre des

veufs est à celui des veuves comme 24 est à 35. Parmi 16 habitants il y avait chaque fois 3 couples mariés. Le rapport du nombre des personnes mariées ou veuves à celui des personnes non mariées (célibataires, demoiselles, enfants et domestiques) était de 37 à 45. Mais en faisant abstraction des domestiques qui sont en général des étrangers, je trouve dans 26 des villages que j'ai nommés 18298 personnes mariées ou veuves et 18589 personnes non mariées; ces nombres sont entre eux dans le rapport de 63 à 64 environ.

Rapport du nombre des habitants à celui des familles.

Dans les villages suivants: Avenhorn, de Beemster, Beets, Benningbroek, Binnewijzend, Bloemendaal, Boskoop, Buiksloot, Critsum, Crommenie, Crommenie-dijk, Etersheim, Grosthuizen, Hauwert, Heilo, Hobrede, Holisloot, den Ilp, Ilpendam, Katham, Katwoude, Kwadijk, Loenen, Nieuwendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostwoud, Oostzaanen, Oostzaandam, Opperdoes, Laage Dijk, de Leth, Purmerland, de Purmer, de Rijp, Schagen, Schardam, Scharwoude, Schellingwoude, Schipluyde, Spaarendam, Sybecarspel, Twisk, Volendam, Uitdam, Watergang, Westgraftdijk, West-ter-Schelling, Westerblokker, Westwoude, Westzaandam, Westzaanen, Wijde Wormer, Nek, Wormerveer, Wijk-op-Zee, Wijdenes, Zaandijk, Zunderdorp et Zwaag, on a compté 12065 familles comprenant 45888 personnes. On a donc trouvé 38 personnes en moyenne dans 10 familles.

Rapport du nombre des habitants à celui des maisons et moulins habités.

On a compté 9895 maisons habitées (parmi lesquelles quelques moulins) dans les villages suivants: Avenhorn, Axwijk, Beets, Benningbroek, Binnewijzend, Buiksloot, Bloemendaal, Boskoop, Broek-in-Waterland, Critsum, Crommenie, Crommenie-dijk, Enge Wormer, Etersheim, Grosthuizen, Hauwert, Heilo, Hem, Hobrede, Holysloot, Ilpendam, Jisp, Katham, Katswoude, Koog, Kwadijk, Landsmeer, Leth, Loenen, Middellie, Midwoud, Nek, Nibbixwoud, Nieuwendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostwoud, Oostzaandam, Opperdoes, Purmer, Rijp, Rysum, Schardam, Scharwoude, Schellingwoude, Schipluyde, Sybecarspel, Twisk, Volendam, Uitdam,

Warder, Watergang, Westgraftdijk, West-ter Schelling, Westerblokker, Westwoude, Westzaanen, Westzaandam, Wormer, Wijde Wormer, Wormerveer, Wijdenes, Zaandijk, Zunderdorp et Zwaag. Ces maisons étaient habitées par 45333 personnes; il y avait donc 23 personnes environ dans 5 maisons.

Rapport du nombre des hommes à celui des femmes.

On a compté 42863 personnes en tout dans les villages suivants: Avenhorn, Binnewijzend, Bloemendaal, Boskoop, Critsum, Crommenie, Grosthuizen, Heilo, Hem, Hobrede, den Ilp, Jisp, Ilpendam, Koog, Landsmeer, Loenen, Middellie, Axwijk, Nieuwendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostwoud, Oostzaanen, Oostzaandam et Opperdoes. Parmi celles-ci il y avait 20711 hommes et 22152 femmes. Le rapport du nombre des hommes à celui des femmes était donc de 100 à 107 environ.

Etat moyen du genre humain d'après les statistiques de la plupart des villages et des hameaux nommés.

Dans les villages suivants: Avenhorn, Binnewijzend, Bloemendaal, Critsum, Etersheim, Grosthuizen, Heilo, Hem, Hobrede, Jisp, den Ilp, Ilpendam, de Koog, Landsmeer, Middellie, Axwijk, Nieuwendam, Oosterblokker, Oosthuizen, Oostwoud, Oostzaanen, Oostzaandam, Opperdoes, Purmerland, Kwadijk, Schardam, Scharwoude, Zwaag, Twisk, Uitdam, Warder, Watergang, Westgraftdijk, West-ter-Schelling, Westerblokker, Westwoude, Westzaanen, Wormer, Wijde Wormer, Nek, Wormerveer, Enge Wormer, Wijdenes, Zaandijk et Zunderdorp, on a compté 5709 couples mariés, 974 veufs, 1417 veuves, 3802 célibataires au-dessus de 10 ans, 3729 demoiselles au-dessus de 10 ans, 3121 garçons en-dessous de 10 ans, 3471 filles en-dessous de 10 ans, 759 serviteurs, 873 servantes; donc en tout 29572 personnes. Aux couples mariés il faut ajouter encore 8 personnes mariés, dont l'époux ou l'épouse demeurait ailleurs.

Comme on voit mieux la grandeur des rapports lorsqu'on considère un nombre petit et rond, je donnerai ici l'état de 1000 personnes d'après la statistique des villages précédents. Mille personnes vivant simultanément, de toutes sortes d'âges, habitent donc 217 maisons et forment 268 familles, composées des personnes suivantes:

Hommes mariés	193	Femmes mariées	193
Veufs	33	Veuves	48
Célibataires et garçons au-dessus de 10 ans	129	Demoiselles au-dessus de 10 ans	126
Garçons en-dessous de 10 ans	105	Filles en-dessous de 10 ans	117
Serviteurs	26	Servantes	30
Hommes	486	Femmes	514

Mille personnes en tout.

Je ne donne pas ces nombres comme ayant une valeur absolue; je ne crois pas que dans tous les autres villages de notre pays, dans nos villes, dans l'Europe entière ou sur toute de la terre, ces mêmes rapports existent entre les différents groupes d'habitants. Je pense au contraire, et je crois même avoir découvert, qu'il y a quelque diversité dans les valeurs de ces rapports, comme on le verra dans la suite. Cependant il me semble assez remarquable qu'on a récemment trouvé en France d'après une statistique analogue, à-peu-près le même rapport entre le nombre total des habitants d'une part et celui des naissances ou des décès d'autre part.

M. Du Pré de St. Maur, membre de l'Académie française, s'est donné beaucoup de peine, il n'y a pas longtemps, pour apprendre à connaître l'état du genre humain plus exactement que cela n'est possible d'après les écrits imprimés jusqu'ici. Il a fait compter exactement de maison à maison en ayant égard à toutes les circonstances dont il faut tenir compte pour découvrir des lois générales, les habitants de 15 villages, situés dans les environs de Paris, et il m'a écrit que pour le rapport entre le nombre total des habitants et le nombre annuel des naissances il y a trouvé $22\frac{7}{12} : 1$ [1]), ce qui s'accorde fort bien avec le résultat de mes observations au sujet des villages hollandais. Le même savant ajoute que si l'on multiplie par $25\frac{1}{3}$ le nombre moyen de ceux qui meurent annuellement dans les villes et dans les villages, on trouve quelquefois plus, mais jamais moins que le nombre des habitants.

1 Dans une lettre qu'il m'a adressée de Paris le 12 Août de l'année 1752.

Son traité a été achevé il y a deux ans; il sera imprimé dans peu de temps attendu qu'on a obtenu la permission de le publier.

DEUXIÈME PARTIE.

Dénombrement des habitants de quelques pays et de quelques villes et remarques générales à ce sujet.

Nombre des habitants de la ville de Rome.

Dans une lettre de M. AUZOUT, écrite de Rome à WILLIAM PETTY, il est dit qu'en 1683 il y avait à Rome 125000 habitants 1). M. FRANÇOIS DESSEINE raconte qu'ayant compté en 1687 le nombre des habitants, on trouva 26834 familles composées des personnes suivantes 2).

Evêques	41
Prêtres	241
Moines et autres ecclésiastiques mâles	3320
Ecclésiastiques du sexe féminin	2084
Ecoliers habitant les collèges	1262
Personnes appartenant à la cour des Cardinaux	2052
Pauvres dans les hôpitaux	1831
Gens de toute espèce dans les prisons	290
Hommes de tout âge 3)	71641
Femmes de tout âge 4)	51470
Membres de l'église catholique	94535
Enfants et autres non-membres	28616
Nombre de ceux qui ont fait la communion	94092
Gens âgés qui n'ont pas fait la communion	440
Femmes publiques	632
Maures	26
Pinzoches (une espèce de religieuses)	61

Dans l'édition française de DESSEINE, publiée à Leyde en 1713, Tome 5, p. 1209, on lit dans les Remarques spéciales (ligne 9

---

1) Philos. Trans. No. 185, p. 239. M. MAITLAND, The History of London, p. 549.

2) Consultez sa Description de Rome, p. 383, Amsterdam 1704.

3) En hollandais: „Manspersonen van allerlei ouderdom". (N. d. tr.).

4) „ „ „Vrouwspersonen van allerlei ouderdom". (N. d. tr.).

et 10): „Mâles de tout âge 71641, Femelles de tout âge 51470"; ce qui n'a pas été traduit exactement en hollandais d'après le texte original: dans l'édition de 1704, publiée à Amsterdam on lit: Mannen van allerlei ouderdom 71641, vrouwen van allerlei ouderdom 51470. Mais les mots italiens dans les régistres de Rome sont les suivants: Maschi d'ogni età, Femine d'ogni età.

Au lieu de 440 qui n'ont pas communié je préférerais lire 443 parce que le nombre des membres était de 94535, dont 94092 ont communié: il en restait donc 443. Il semble bien aussi que le nombre des hommes ou celui des femmes doit être augmenté de 40, car de cette façon la somme de ceux qui ont communié et qui n'ont pas communié, savoir 123151, devient précisément égale au nombre des habitants de la ville. Cinq familles comprenaient en moyenne 23 personnes. Mais ce qui m'étonne le plus c'est que M. DESSEINE ajoute les nombres des différentes espèces d'habitants. Il trouve le nombre 329634; il a apparemment commis une erreur, la somme doit être 352634. C'est là le nombre que selon lui on devrait considérer comme celui des habitants à cette époque; or, il est évident qu'il ne faut nullement prendre la somme de tous ces nombres, mais qu'il suffit de prendre la somme des nombres des hommes et des femmes. En effet, si l'on voulait admettre qu'il y avait alors à Rome 352634 habitants parmi lesquels 28616 enfants et autres n'ayant pas communié outre les 440 qui avaient négligé de le faire, 325598 personnes devraient avoir fait leur communion, tandisque le régistre n'en mentionne que 94092.

Depuis longtemps les prêtres de chaque paroisse ont eu coutume dans cette ville de compter chaque année avant Pâques les familles et toutes les diverses catégories de la population, pour voir qui ont communié et qui ont négligé de le faire. On note aussi les nouveau-nés; mais quoiqu'en italien il soit parlé de „Nati", il se pourrait néanmoins que cette expression désigne le nombre des baptisés, attendu qu'en plusieurs endroits on ne fait aucune différence entre ces deux catégories. On note en outre les décès annuels. M. le comte LOUIS RIARIO m'a communiqué les régistres de la population, ainsi que ceux des naissances et des décès, relatifs à 26 années. Les régistres des naissances et des décès commencent avec la semaine de Pâques d'une année déterminée et finissent par la semaine de Pâques de l'année suivante. Je

possède en outre deux régistres relatifs à la période 1716—1724; d'après ceux-ci mille personnes de plus sont nées en 1718 que d'après les nouveaux régistres; et 400 personnes de plus sont décédées en 1723. D'après l'ancien régistre le nombre total des habitants était de 137958 en 1716, ce qui me paraît beaucoup plus probable, eu égard aux nombres de l'année précédente et de l'année suivante. Pour chacune des 8 années suivantes il y a aussi quelques légères différences, mais elles sont sans importance, car la somme totale des nombres des habitants est de 1097786 pour les 8 années en question suivant le nouveau régistre et du même nombre augmenté de 30 suivant l'ancien.

Année	Naissances	Décès	Nombre total des habitants	Année	Naissances	Décès	Nombre total des habitants
1715	4056	4605	136350	1728	4830	5388	143981
1716	4285	6470	138987	1729	5024	5436	144690
1717	3409	6078	136358	1730	4982	7237	145494
1718	4257 1)	5770	136265	1731	4164	4907	146148
1719	3409	4290	137797	1732	5077	5115	149674
1720	4292	6029	132829	1733	4907	6557	149672
1721	4164	6784	134232	1734	4894	6441	151334
1722	4675	4327	138084	1735	4933	4890	150665
1723	4424	4794 2)	139867	1736	4799	5466	150649
1724	4482	4383	142354	1737	5054	7382	149180
1725	4527	6015	148148	1738	4823	6755	147119
1726	4948	5215	145955	1739	4600	5360	146750
1727	4615	5623	145937	1740	4848	5837	146080

Le nombre total des naissances a été de 118559 pendant cette période; le nombre annuel moyen est donc de 4560. Le nombre total des décès a été de 147154, ce qui fait 5660 chaque année en moyenne. Or, si l'on ajoute les nombres des habitants et qu'on divise la somme par 26, on trouve 143638. C'est là le chiffre moyen de la population de Rome qui peut être comparé avec le nombre moyen des naissances ou des décès pendant la même époque. J'ajouterai encore ici les particularités des dénombrements des deux dernières années considérées.

---

1) D'après l'ancien régistre.

2) D'après l'ancien régistre. Tous les autres nombres sont tirés du nouveau régistre.

Paroisses	82	82
Familles	30766	32158
Evêques	78	62
Prêtres	2816	2736
Frères ecclésiastiques et religieuses	3717	3810
Moines	1968	1868
Ecoliers dans les collèges	1411	1501
Pauvres dans les hôpitaux	837	1233
Maures	14	14
Pinzoches	77	76
Turcs et autres incrédules, excepté les Juifs	85	55
Nombre de ceux qui ont fait la communion	* 114887	* 113873
Nombre de ceux qui ne l'ont pas faite (gens âgés et enfants)	31863	32207
Hommes de tout âge	* 83049	* 82272
Femmes de tout âge	63701	63808

Chaque somme de deux nombres marquée par un astérisc exprime le nombre total de la population. De même que le nombre des habitants est à-présent supérieur à celui qu'on a trouvé en 1683, de même aussi on a trouvé un plus grand nombre de personnes dans chaque famille: ce nombre était de 14 à-peu-près pour 3 familles.

M. le comte CERATI m'a envoyé une liste donnant le nombre des naissances, le nombre des décès et le nombre total des habitants comptés à Rome dans les années suivantes:

Année	Naissances	Décès	Nombre total
1741	4931	5254	146010
1742	4841	6058	146531
1743	4703	7702	147476
1744	....	....	147432

Pour la dernière année les nombres des naissances et des décès n'ont pas été indiqués. Le nombre total des personnes du sexe masculin était de 81363, et des personnes du sexe féminin de 66069. — Le régistre donne aussi le nombre des habitants pour chaque paroisse séparément.

M. MAITLAND raconte que le Pape CLÉMENT XI a fait compter en 1714 le nombre des habitants de Rome et que M. CARACCIOLI,

en Juillet, a publié le résultat de ce dénombrement: 143000 personnes 1). Il ajoute que la ville était alors pleine d'étrangers; il est impossible de le contredire, car dans cette ville il y a toujours un grand nombre d'étrangers. M. SUSZMILCH arrive à la conclusion que le chiffre 125000 représente le mieux le nombre de la population 2); en effet, d'après M. MAITLAND le nombre des étrangers peut être estimé égal à 20000. — A mon avis ces nombres diffèrent trop de ceux qui ont été trouvés pour l'année 1715; c'est pourquoi j'ai demandé les résultats de dénombrements antérieurs. J'ai reçu de M. GIUSEPPE PANCRAZI TEATINO DE LIVORNO les régistres de Rome relatifs à la période 1702—1724 lesquels font voir qu'en 1714 on y a compté 134050 personnes, ce qui a été probablement changé en 134000 par les copistes pour arrondir le nombre; et il est possible que plus tard en copiant on en imprimant ce nombre on l'ait changé en 143000 par une transposition de 2 chiffres. En effet depuis l'année 1702 jusqu'à l'année 1723, on a compté à Rome chaque année plus de 133 et moins de 140 mille habitants; mais depuis l'année 1724 jusqu'à l'année 1740 toujours plus de 140 et moins de 152 mille habitants. J'ajouterai encore ici les dénombrements relatifs à six années

Année	Naissances	Décès	Nombre total des habitants
1709	4396	6463	134162
1710	4309	6533	132070
1711	4254	5227	132979
1712	4187	3855	133829
1713	4029	4772	132567
1714	4080	4777	134050

En ajoutant pour 32 années les nombres des habitants qui vivaient à Rome vers la fête de Pâques, et en divisant la somme par 32, je trouve 141695 comme chiffre moyen de la population. Le nombre moyen des décès pendant la même époque est de 5587, de sorte que le nombre total des habitants y est au nombre annuel des décès environ comme $25\frac{1}{3}$ est à 1. En prenant la

1) The History of London, p. 549.

2) Die Gottliche Ordnung des Menslichen geslechts, p. 321; Berlin 1741.

moyenne du nombre des habitants pendant 6 ans, de 1734 à 1739. on trouve une population de 149283 âmes. Le nombre annuel des décès pendant cette période est de 6049. Par conséquent pendant cette période le nombre total des habitants a été au nombre annuel des décès comme $24\frac{2}{3}$ est à 1. D'après un dénombrement qui a été fait à Londres, M. MAITLAND a découvert que le rapport des deux nombres correspondants y était de $24\frac{4}{7}$ à 1. 1). Pendant ces 6 dernières années 8011 personnes en moyenne sont décédées chaque année à Amsterdam, 1790 à Leyde, 1383 à Harlem, 3649 à Berlin. A cette époque il y avait à Berlin environ 83000 habitants.

Le rapport du nombre des décès à Rome était au nombre correspondant

à Amsterdam	comme	3	est	à	4,
à Leyde	„	27	„	„	8,
à Harlem	„	35	„	„	8,
à Berlin	„	5	„	„	3.

Le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des naissances varie beaucoup d'un endroit à un autre, pour diverses raisons. Si dans une forteresse près des frontières il y a beaucoup de soldats célibataires et peu de citoyens, on ne peut conclure du nombre annuel des naissances au nombre total des habitants; mais ce dernier nombre peut toujours être trouvé approximativement par le nombre annuel des décès. Car il n'y a pas de lois qui puissent empêcher le décès, mais il y en a qui empêchent le mariage. Néanmoins le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des décès diffère quelque peu dans les endroits où il y a peu de gens mariés et par conséquent peu d'enfants d'une part et dans ceux où les enfants sont plus nombreux par rapport à la population d'autre part, comme c'est le cas pour plusieurs villages hollandais. En effet, là où il y a plus de jeunes enfants, le nombre annuel des décès est plus grand, le nombre total des habitants étant le même.

A Rome pendant 32 ans le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des naissances a été de $31\frac{1}{2}$: 1 en moyenne,

1) The History of London, p. 540.

mais pendant les six années 1734—1739 ce rapport a été de $30\frac{3}{4}$: 1. Il est clair qu'il y a beaucoup de célibataires dans cette ville. En effet, il y a un grand nombre d'ecclésiastiques qui y habitent, ou qui viennent d'ailleurs et y restent quelque temps; il y a ensuite un grand nombre de voyageurs, de domestiques non-mariés et d'étudiants dans les collèges. On voit aussi qu'il doit y avoir beaucoup de célibataires par le fait que le nombre des hommes dépasse celui des femmes de 20000. Et encore par le fait que le nombre de ceux qui n'ont pas fait leur communion ne constitue qu'une petite partie de la population, $\frac{7}{32}$ en moyenne pendant les deux dernières années, 1739 et 1740. Or, si l'on admet que tous ceux qui n'ont pas communié sont en-dessous de 10 ans, il apparaît qu'il y a peu d'enfants par rapport au nombre total des habitants. En effet, les dénombrements exacts qui ont été faits dans les villages de Crommenie et de Warder ont fait voir que les enfants âgés de moins de 14 ans y formaient le tiers de la population.

Pour faire voir qu'à Rome la loi ordinaire relative au nombre des naissances est valable, il faut raisonner comme suit.

Le nombre des religieuses doit avoir été de 2500 environ en 1739, d'après la statistique de 1683. En retranchant ce nombre de 63701, c.à.d. du nombre total des femmes qu'on y trouvait en 1739, on trouve un nombre de 61201 femmes correspondant avec celui des femmes qui habitent d'autres villes, où l'on ne fait pas le voeu de ne pas se marier. Or, si nous supposons que le rapport du nombre des hommes à celui des femmes est égal à ce même rapport pour les villages, c.à.d. à 100 : 107, le nombre des hommes sera de 57197, et le nombre total des hommes et des femmes de 118398. Les autres sont des étrangers, des moines et autres ecclésiastiques, des voyageurs, etc. Durant 10 ans, de 1729 à 1740, 4934 enfants en moyenne sont nés ou ont été baptisés chaque année (j'exclus les années 1731 et 1739 à cause des mortalités de l'année précédant chacune d'elles). Si l'on compare ce nombre avec le nombre précédent 118398 qui est celui des habitants de Rome dont il faut tenir compte, si l'on veut considérer Rome sous le même point de vue que d'autres villes où il n'y a pas autant d'étrangers ni autant de célibataires, on voit que les nouveau-nés (ou plutôt les baptisés) forment la

vingt-quatrième partie de la population. Si l'on ne considère que les enfants nés (ou baptisés) en 1737, qui étaient au nombre de 5054, le rapport du nombre total des habitants, c.à.d. le nombre 118398, sera au nombre annuel des naissances (ou des baptêmes) comme $23\frac{2}{7}$ est à 1.

Considérons encore la mortalité, mais en suivant une autre méthode. Il y a à Rome un nombre d'hommes supérieur de 19400 environ à celui des femmes; cet excès constitue les $\frac{2}{15}$ de la population. J'admets que cet excès est dû aux étrangers qui arrivent à Rome âgés de 20 à 50 ans et qui en quittant la ville sont remplacés par d'autres étrangers. Annuellement la cinquantième partie environ des hommes de cet âge meurt; cela fait 388. En retranchant ce nombre du nombre annuel des décès à Rome c.à.d. de 5587 comme nous l'avons trouvé précédemment, on voit qu'il en reste 5199. D'après le calcul de la moyenne il y avait à Rome 141695 habitants; j'en retranche le nombre des étrangers, c.à.d. 19400. Restent 122295 que je considère comme les vrais habitants; le rapport de ce nombre au nombre annuel des décès est de $23\frac{1}{3}$ à 1. Mais si l'on prend comme précédemment 118398 pour le vrai nombre des habitants de Rome, et si l'on suppose que le rapport du nombre des habitants à celui des couples mariés y est égal au rapport correspondant à Broek-in-Waterland, c.à.d. à 6 : 1, il s'ensuit qu'il y aurait à Rome 19733 couples mariés. Si l'on admet ensuite que (d'après ce que l'expérience enseigne dans les villages) 5 enfants naissent annuellement de 22 couples mariés, il en résulte que 4485 enfants naissent de 19733 couples. Ce serait là le nombre des enfants légitimes nés à Rome. Or, pendant les années 1739 et 1740, 4754 enfants en moyenne y sont réellement nés ou y ont été baptisés.

En 1739 on y a compté 30766 familles. Si 13 enfants naissaient annuellement de 80 familles, ainsi qu'à Harlem et que dans les villages hollandais, le nombre annuel des naissances serait de 5000 environ, ce qui ne diffère pas beaucoup du nombre qu'on trouve dans les régistres. La différence peut provenir de ce qu'à Rome il y a dans un même nombre de familles un peu moins de couples mariés qu'à Harlem.

Remarque à-propos du dénombrement de la population à Bologne.

J'ai hésité autrefois à donner mon adhésion aux paroles suivantes de RICCIOLUS qu'on trouve dans sa ,,Geographia et Hydrographia", Liber 12, p. 681. Venet. A⁰ 1672: ,,Sicut Bononiae ex observatione multorum annorum nascitur quotannis decima quinta circiter pars totius numeri hominum Bononiam incolentium", c.à.d.: ,,De même qu'à Bologne, d'après les observations relatives à un grand nombre d'années, il naît chaque année un nombre d'enfants à-peu-près égal à la quinzième partie des habitants". — Mais après que j'ai trouvé une statistique relative à une époque antérieure à l'année 1657, il me semble qu'on peut cependant interpréter les paroles de l'auteur de telle façon que son récit s'accorde plus ou moins avec d'autres observations. On a compté les nombres suivants.

Dans la ville				Dans les faubourgs			
Hommes	18629	Femmes	19782	Hommes	4855	Femmes	5404
Garçons	7036	Filles	5637	Garçons	2951	Filles	2248
Serviteurs	2978	Servantes	3984	Serviteurs	335	Servantes	444
Hommes	28643	Femmes	29403	Hommes	8141	Femmes	8096
Ecclésiastiques	3552	des deux sexes		Femmes	8096		
Dans les Hôpitaux	1193	des deux sexes		Dans les faubourgs	16237		
Femmes	29403			Dans la ville	62791		
Somme	62791			Somme totale	79028 1)		

RICCIOLUS semble avoir voulu parler du rapport de la somme des nombres des hommes adultes et des femmes adultes au nombre annuel des naissances. Le nombre des hommes adultes, dans la ville et dans les faubourgs, était de 23484, et celui des femmes adultes de 25186, ce qui fait ensemble 48670 2). La quinzième partie de ce nombre est 3245. En adoptant ce chiffre pour celui des naissances, on trouve que la population totale est au nombre annuel des naissances comme $24\frac{3}{8}$ est à 1, résultat conforme à celui d'autres observateurs.

A la même page du livre de RICCIOLUS on trouve encore les remarquables paroles suivantes: ,,(Quoniam) numerus hominum

1) LAMB. VAN DEN BOS, Guide à-travers l'Italie, p. 215 et 216. Dordregt, 1657.

2) Sous le nom d'adultes il faut comprendre probablement toutes les personnes au-dessus de 14 ans; c'est ce qui semble résulter des nombres des garçons et des filles.

unius civitatio, quando ejus pomoeria non dilatantur, nec agri, in quibus fundatur victus Hominum: solet citra Clades Bellicas, Lues, Famesque, conservari in eadem proxime quantitate. Exempli gratia Bononiae a multis jam annis numerus hominum consuevit esse inter 60 et 70 millia, et Florentiae inter 70 et 80, etc. Atque adeo totidem moriuntur quot nascuntur, si non eodem anno, saltem adjuncto tempore Cladium, Pestis ac Famis". C.à.d... ,,Le nombre des habitants d'une même cité reste à-peu-près constant, abstraction faite des guerres, des maladies contagieuses et des famines, à moins que la ville ne soit agrandie ou que les contrées environnantes d'où ses habitants tirent leur nourriture, ne soient étendues ou améliorées. A Bologne p. e. le nombre des habitants a été de 60 à 70 mille depuis un grand nombre d'années; et à Florence ce nombre est de 70 à 80 mille. On peut dire que le nombre annuel des décès est à-peu-près égal au nombre annuel des naissances, si non dans la même année du moins lorsqu'on tient compte aussi des temps de guerre, de peste et de famine."

Evaluations du nombre des habitants d'Espagne.

Aucune bonne évaluation pour ainsi dire n'avait été faite en Espagne, avant la publication du livre de M. D. USTARIZ, écrit en 1724 et imprimé à Madrid en 1740. Dans ce livre, intitulé ,,Theoria & Practica del Commercio y Marina", l'auteur suppose qu'il y a à-peu-près et au plus $7\frac{1}{2}$, ou $7\frac{1}{5}$, millions d'habitants en Espagne. Je ne possède pas ce livre moi-même et celui qui m'a fourni cette donnée avait oublié lequel de ces deux nombres était le nombre véritable. Le livre en question est traduit actuellement en français et en anglais. — D[n] ANTON. DE ULHOA m'a dit qu'en Espagne on était occupé a recenser la population.

Evaluations du nombre des habitants de toute la Moscovie.

Cet empire a une largeur d'environ 300 milles allemands et une longueur de plus de 500 milles allemands. C'est un pays extrêmement fertile produisant beaucoup de blé ainsi que tous les autres produits agricoles nécessaires à la vie, surtout dans les environs du fleuve Moscou et du côté de la petite Tartarie.

Malgré tous ces avantages, le nombre des habitants serait inférieur à 15 millions. 1)

On estime qu'il y a actuellement en Russie 500000 familles nobles, 200000 ecclésiastiques et un peu plus de 5 millions de citoyens et de paysans. Il y aurait en outre 600000 habitants dans les provinces conquises sur les Suédois; et les Cosaques d'Ukraine joints aux Tartares sujets de l'impératrice seraient au nombre de 2 millions au plus. On a trouvé de cette façon que dans ces pays extrêmement étendus il n'y aurait que 14 millions habitants, c. à. d. les deux tiers des habitants de la France. 2)

Le nombre des soldats que d'après le rapport de leur Chan les Tartares de Dagesthan pourraient mettre sur pied pour servir l'impératrice de Moscovie en temps de guerre est de 66700.

Dénombrement des habitants de toutes les villes de la Prusse et de l'électorat de Brandebourg.

En 1738 on a fait un dénombrement de tous les habitants des villes situées dans le domaine du Roi de Prusse, excepté Gelder, Lauenbourg et Butow. Les soldats et les autres personnes appartenant à l'armée ne sont pas compris dans ce dénombrement. On y a trouvé

Hommes	137012	Femmes	158290
Fils	129187	Filles	137505
Ouvriers	20719	Servantes	51388
Serviteurs et domestiques	13850		
Apprentis	17909		
Hommes	318677	Femmes	347183

Nombre total des habitants: 665870 3).

Nombre des habitants de la ville de Berlin.

Dans cette ville on a fait un dénombrement en 1737 par ordre du Roi de Prusse. On y a trouvé 4)

1) Voyez l'auteur de l'Anti-Machi vel, p. 65.

2) VOLTAIRE, Histoire de Charles XII, p. 43.

3) „Die Gottliche Ordnung des Mensl. Geslechts" par J. P. SUSZMILCH, p. 150 et Table 16.

4) „Die Gottliche Ordnung" par J. P. SUSZMILCH, p. 151.

Hommes	14660	Femmes	16337
Fils	11234	Filles	13672
Ouvriers	3694	Servantes	5198
Serviteurs et domestiques	1653		
Apprentis	1749		
Hommes....	32990	Femmes....	35207

Nombre total des habitants: 68197.

Parmi ce nombre ne sont compris ni les soldats, ni leurs femmes et enfants. On n'a pas tenu compte non plus des orphelins, des veuves pauvres, des personnes qui se trouvaient dans les dépôts de mendicité, et de celles qui avaient leur résidence ailleurs. Au nombre trouvé ainsi M. SUSZMILCH ajoute le nombre 15000 qu'il estime correspondre aux 5 régiments d'infanterie, à l'artillerie et aux gendarmes avec leurs femmes et enfants, ainsi qu'aux personnes se trouvant dans les orphelinats, les hôpitaux et les dépôts de mendicité. Le nombre total des habitants aurait donc été de 83000 environ.

Pour les 6 années suivantes la statistique de Berlin donne les nombres suivants pour les baptêmes et les décès.

Année	Baptêmes	Décès
1734	3704	3008
1735	3495	3257
1736	3726	4289
1737	3335	4037
1738	3245	3745
1739	3519	3502
Donc pendant six ans .	21024	21838
	6	
Annuellement	3504	3640

En comparant ces deux nombres séparément avec le nombre 83000, on trouve que le nombre des habitants de Berlin est au nombre annuel des naissances comme $23\frac{2}{7}$ est à 1, et au nombre annuel des décès comme $22\frac{4}{5}$ est à 1. Depuis l'année 1712 jusqu'à l'année 1732 inclusivement, 55540 enfants sont nés à Berlin, et

56158 personnes y ont été enterrées. 1) Je ne sais pas si parmi ce dernier nombre les Juifs sont compris. En 1732, 28 Juifs sont morts à Berlin. 2) Les enfants juifs ne sont pas compris dans le nombre annuel des baptisés. Si l'on y ajoute ces enfants, ainsi que ceux qui sont nés vivants mais qui sont morts avant le baptême, le nombre annuel des baptisés sera à-peu-près égal au nombre annuel des décès.

En 1747 on a compté à Berlin 107224 âmes. Parmi ce nombre étaient compris les soldats de la garnison avec leurs femmes et leurs enfants. 3) C'est également par ordre du Roi de Prusse qu'on a fait ce dénombrement; ce sont les officiers des régiments formant la garnison qui l'ont exécuté. Le nombre des citoyens et de leurs enfants était de 39278 du sexe fort et de 45620 du sexe faible, outre 421 qui habitaient en-dehors des remparts près de la ville. La garnison, femmes et enfants compris, était au nombre de 21905. La police a également compté la population; voici le résultat de ce dénombrement:

Hommes	16344	Femmes	20984
Fils	14005	Filles	16675
Ouvriers	3969	Servantes	8279
Serviteurs et domestiques	2722	Femmes...	45938
Apprentis	2076	Hommes...	39116
Hommes...	39116	Somme totale...	85054

Ce résultat n'est inférieur que de 265 au résultat précédent. Parmi le nombre 85054 il y avait 7193 membres de la colonie française, 1478 membres de la colonie bohémienne et 2007 juifs. Le nombre des maisons était de 5513.

En 1747, 3512 enfants ont été baptisés à Berlin et 3458 personnes y sont décédées. 4) M. SUSZMILCH estime probable qu'an-

---

1) „Die Gottliche Ordnung", table 15.

2) Le même livre, p. 341.

3) Ceci est emprunté à un autre ouvrage du même auteur, intitulé „Der Konigl. Residentz Berlin Schneller Wachsthum" par JOHAN PETER SUSZMILCH, membre du Conseil Consistorial Royal, prévôt à Cologne, anciennement curé à St. Petri, membre de l'Académie royale des sciences de Prusse. Cet ouvrage à été imprimé à Berlin en 1752.

4) Même ouvrage, p. 33.

nuellement il y meurt 1 personne sur 30 (quoiqu'il trouve 1 sur 28), tandisque dans les villages il en meurt une sur 40 au 45 et à Londres une sur 22 ou 24 personnes. 1) Même si l'on admet qu'en Prusse le dénombrement dans les villages a été bien exécuté et que les nombres donnés sont exacts, la grande différence des rapports ne provient pas de ce que l'état de santé dans les villages prussiens est tellement meilleur ou qu'on y vit plus sainement, mais de ce que beaucoup de personnes quittent les villages pour se diriger vers les grandes villes ou même vers l'étranger et qu'elles meurent là. Il est vrai que beaucoup de soldats recrutés dans les pays environnants viennent en Prusse, mais ceux-ci, s'ils ne désertent pas, meurent en général dans les villes en temps de paix et à la campagne en temps de guerre. Le nombre des baptisés dans la Prusse tout entière est au nombre de ceux qui meurent annuellement dans les périodes où la santé est bonne, comme 13 est à 10, suivant le calcul de M. SUSZMILCH. Il pense que la densité de la population augmente 2), mais ne pourrait on pas également arriver à une conclusion opposée? 3) Il faut observer que le même auteur déclare à regret que le nombre des pauvres augmente fort à Berlin 4) et que celui des naissances diminue 5).

Nombre des habitants de la ville de Königsberg en Prusse.

Les nombres des paroisses, des maisons et des habitants, en 1728 et en 1729, y ont été les suivants, d'après les régistres construits par des fonctionnaires spéciaux.

---

1) Même ouvrage, p. 26 et 27.

2) „ „ p. 38.

3) A l'aide de deux dénombrements exacts on peut sans grande difficulté arriver à savoir si la population d'un pays ou d'une ville augmente ou diminue, comme on peut le voir dans mon ouvrage intitulé „Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine", publié ci-devant, à la page 193.

4) Voyez l'ouvrage allemand dernièrement cité, p. 42.

5) Même ouvrage p. 39.

Noms des paroisses	Maisons	Habitants en 1728	Habitants en 1729
Altstadt.............	487	3428	3574
Lomse................	84	142	201
Steindam	1110	8802	8892
Kneiphoff	395	3384	3385
Faubourg de Kneiphoff	947	7094	7233
Nassengarten	156	1024	1044
Loebenicht	268	1406	1581
Le Grand Hôpital.....		800	800
Arger	142	1119	1004
Draegheim	372	2695	2730
Burg-Fryheid	177	1790	1742
Vorder Rosgarten.....	149	1486	1506
Hinter Rosgarten.....	144	899	855
Neue Sorgen	116	1739	1616
Brandstadt	237	678	678
Sackheim.............	392	3707	3630
	5176	40253	40471

Je ne possède pas les nombres des baptisés, des couples mariés et des personnes décédées relatifs aux années où le dénombrement a été fait; mais je les possède pour quelques années antérieures ou postérieures de peu à celles-là, de sorte que le nombre total des habitants doit avoir été environ le même. Je ferai suivre ici les données relatives à 3 années antérieures et à 3 années postérieures. J'ai trouvé les données relatives aux 3 premières dans les Transactions anglaises, No. 381, p. 29 et 34, et No. 400, p. 69. La première colonne y est intitulée ,,Christened'', c. à. d. ,,Baptisés''. Les données relatives aux 3 dernières années sont tirées des listes imprimées qui paraissent annuellement. Il est vrai qu'on y lit ,,Nés'', mais le nombre des baptêmes est confondu avec celui des naissances dans beaucoup de régistres: on peut plus facilement apprendre à connaître le premier nombre; le second n'est connu que dans les localités où les accoucheuses doivent faire inscrire les enfants nouveau-nés. — Le nombre moyen des habitants de Königsberg est de 40362.

Année	Baptisés	Couples mariés	Décédés	Année	Baptisés	Couples mariés	Décédés
1720	1682	474	1402	1740	1704	428	1948
1721	1655	424	1776	1741	1564	453	1950
1722	1664	442	1688	1742	1621	555	1589
	5001	1340	4866		4889	1436	5487

Durant ces 6 années le nombre total des baptisés a été de 9890, ce qui fait 1648 en moyenne annuellement. J'y ajoute le nombre 41 que je considère comme celui des enfants morts avant le baptême. Il vient donc 1689. On voit ainsi que le nombre annuel des naissances est au nombre total des habitants comme 1 est à $23\frac{3}{10}$. Mais ce dernier nombre doit être diminué encore, attendu qu'on trouve aussi dans la ville des Mennonites dont les enfants nouveau-nés ne sont pas baptisés. Les adhérents de ce culte y sont appelés les Vieux-Flamands. En 1743 il y avait deux pasteurs de cette secte. Il y a en outre à Königsberg quelques Juifs.

Le nombre des décès dans cette ville a été de 10353 durant les six années en question; cela fait en moyenne 1725 par an. Le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des décès y est donc de $23\frac{2}{5}$ à 1. Outre les nombres des décédés relatifs à ces six années j'ai encore les nombres correspondants pour les années 1717, 1718, 1719, 1724, 1725, 1737 et 1738. Pendant ces 7 années 12330 personnes en tout y sont décédées. Cela fait 22683 personnes en 13 ans, si l'on y ajoute le nombre correspondant aux six années dont il était question plus haut. Donc en moyenne 1745 par an. De cette façon on obtient pour le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des décès la valeur $23\frac{1}{3}$: 1.

En 1737 et en 1738, 820 couples se sont mariés. En ajoutant ce nombre à celui des 2276 couples mariés dans les six années dont nous avons parlé, on trouve un nombre total de 3596 couples, c.à.d. de 450 par an. On peut donc dire que dans cette ville deux personnes sur 90 environ se marient chaque année.

Nombre des habitants de la ville de Brandebourg.

On a fait un dénombrement des habitants de cette ville dans l'année 1736, et l'on y a trouvé

Hommes	1640	Femmes	2260
Fils	1663	Filles	1696
Ouvriers	324	Servantes	502
Serviteurs et domestiques	78		
Apprentis	183		
Hommes...	3888	Femmes...	4458

Nombre total des habitants: 8346 1).

En 1736, 290 personnes y sont mortes 2); le rapport du nombre total des habitants au nombre des décès en cette année-là était donc de $28\frac{3}{4}$ environ à 1. Pendant 21 ans on y a baptisé 3142 garçons et 2928 filles, 6070 enfants en tout; cela fait annuellement 289 enfants en moyenne 3).

Nombre des baptêmes (ou des naissances) et des décès à Copenhague et dans toute la province de Zélande en Danemarc, en 1751.

Dans la ville de Copenhague 1411 fils et 1370 filles ont été baptisés en cette année; cela fait en tout 2781 enfants. Le nombre des couples qui s'y sont mariés était de 821; 760 hommes, 637 femmes, 713 garçons et 688 filles, 2798 personnes en tout y sont décédées. Le nombre des décès a donc surpassé de 17 le nombre des naissances. Dans toute la province de Zélande 7925 enfants sont nés, 2248 couples se sont mariés et 6777 personnes sont décédées. Le fait que ce dernier nombre est si petit peut s'expliquer surtout par les deux causes suivantes: 1) dans cette année il n'y a pas eu de maladies épidémiques, 2) beaucoup d'habitants de la campagne ne meurent pas dans la localité où ils sont nés, mais à l'étranger ou sur mer. Le nombre total des habitants, y compris la ville de Copenhague, doit être égal à un quart de million environ, et de ce nombre 70000 à-peu-près doivent habiter cette ville.

Nombre des habitants dans une localité importante de l'Inde orientale.

En 1748, au mois de Décembre, on y a trouvé les nombres d'habitants que voici.

1) „Die Göttliche Ordnung" par J. P. SUSZMILCH, p. 151.

2) Même ouvrage, p. 313.

3) „ „ p. 138.

Dans la ville.

	Hommes	Femmes	Fils au-dessus de 14 ans	Filles au-dessus de 14 ans	Fils en-dessous de 14 ans	Filles en-dessous de 14 ans
Européens	940	322	31	53	95	137
Mixtizen	132	227	36	45	85	77
Mardykers	408	634	120	132	132	130
Chinois	710	365	16	31	103	111
Maures et Jentives...	43	33	4		14	12
Malais et Javanais...	52	78	4	3	20	17
Balinois et Macassarois	8	8			8	8
	2293	1667	211	264	457	492
Serfs	4838	3412	Enfants 776			
	7131	5079				

Les 4 dernières colonnes donnent une somme de 2200. Il y avait donc en tout 14410 habitants dans la ville.

Dans les environs.

	Hommes	Femmes	Fils au-dessus de 14 ans	Filles au-dessus de 14 ans	Fils en-dessous de 14 ans	Filles en-dessous de 14 ans
Hollandais	168	55	6	7	25	23
Mixtizen	126	174	36	40	78	75
Mardykers	1501	1938	411	424	763	661
Chinois	4162	2235	416	294	1063	896
Amboinais	155	165	25	29	60	38
Maures	244	240	57	47	117	118
Malais	617	532	166	111	203	201
Boutondois, Macassarois en Bouginais..	1684	1543	384	335	691	596
Balinois et Javanais..	11275	9310	3090	2531	3949	3860
	19932	16192	4591	3818	6949	6468
Esclaves	6832	5729	Enfants 2114			

Dans les environs il y avait donc en tout 72625 habitants; en y ajoutant le nombre des habitants de la ville, on trouve 87035 personnes. Le nombre des personnes libres est de 63334, parmi lesquelles 34433 du sexe fort et 28901 du sexe faible; ces deux derniers nombres sont entre eux comme 25 et 21 environ.

Dans un récit imprimé j'ai trouvé les nombres des décès qui

ont eu lieu dans cette localité pendant l'année 1745 et pendant 3 mois de l'année 1746. Voici ces nombres.

	Hommes européens	Femmes européennes	Enfants européens	Hommes indigènes	Femmes indigènes	Enfants indigènes	Serfs	Somme totale
Année 1745	1859	53	74	137	236	299	1652	4310
,, 1746 mois de Mars	126	4	1	21	35	32	118	337
,, 1746 ,, d'Avril	136	5	3	13	27	21	113	318
,, 1746 ,, de Juin	151	4	11	17	24	25	112	344
,, 1746 pendant 3 mois	413	13	15	51	86	78	343	999

Un monsieur qui a occupé durant plusieurs années un poste important dans la localité dont nous parlons et qui était donc fort au courant m'a raconté qu'une statistique de ce genre est envoyée en Europe chaque année, qu'on peut se fier au nombre des Européens et des Mixtizen, mais non pas aux autres nombres attendu qu'ils sont fournis par les princes indigènes et qu'il peut fort bien y avoir des erreurs dans les nombres des esclaves et des enfants surtout chez les Chinois parce que ceux-ci payent une taille personnelle. La liste des décès n'est pas bien certaine non plus. Ce serait une belle chose si l'on pouvait tout savoir exactement. — J'ai ajouté cette remarque pour qu'on ne construise pas de faux systèmes en partant de ces nombres et parce que je ne veux pas sembler attribuer plus de valeur à cette statistique qu'elle ne mérite.

Nombre des habitants d'Amboina.

On a l'habitude d'y compter chaque année le nombre des habitants. La somme des nombres qu'on a trouvés pour les 20 années 1689—1708 a été de 1530541. En divisant ce nombre par 20 on trouve en moyenne un nombre de 76527 habitants. En 1689 on a compté 70027 personnes; c'est là le plus petit des nombres. En 1698 on en a trouvé 81027; c'est là le plus grand nombre. Je ferai suivre ici les particularités du dénombrement exécuté en 1708.

	Hommes	Femmes	Enfants
Européens	763	28	54
Mixtizen	71	105	269
Chinois	125	86	170
Macassarois libres	152	229	155
Noirs libres	251	304	300
Amboinais, tant chrétiens que maures et païens	18626	18014	23873
Esclaves macassarois	918	525	165
Autres esclaves	3277	3415	1902
	24183	22706	26888

Nombre total des habitants: 73777. 1)

Nombre des habitants de la ville de Leeuwarden et des environs (juridiction de L.)

C'est au mois de Mai de l'année 1748 qu'on a fait ici un dénombrement des habitants dont voici le résultat.

Dans la ville	Personnes au-dessus de 12 ans	Personnes en-dessous de 12 ans
Quartier Oosthoekster	804	321
,, Oostkeimpema	706	218
,, Keimpema	885	355
,, Westkeimpema	536	164
,, Zuidoldehoofster	1463	492
,, Noordoldehoofster	1213	321
,, Westminnema	851	188
,, Minnema	514	97
,, Oostminnema	971	262
,, Westhoekster	1018	372
	8961	2790
En-dehors de la ville		
Het Vliet	1347	493
Oude Galileen	253	101
Kamstrabuyren	102	31
't Oud en Nieuwland	146	36
En-dehors de la ville	1848	661 somme 2509
Dans la ville	8961	2790 somme 11751
Au-dessus de 12 ans	10809	3451
En-dessous de 12 ans	3451	
Somme totale	14260 habitants. 2)	

1) D'après la Description d'Amboina, par FR. VALENTIJN, Deuxième partie, p. 342.

2) Ces nombres sont empruntés au „Récit détaillé des troubles en Frise", imprimé à Leeuwarden en 1749, p. 73 et 74.

Il me semble que dans ce dénombrement les soldats ne soient pas compris. Le nombre annuel des décès à Leeuwarden surpasse rarement le nombre 600 1). En 1747, 543 personnes y sont mortes 2) et l'année suivante 528 personnes. 3) En 1746 il y a eu 815 décès; dans ce nombre sont compris les soldats décédés. Si nous admettons que le nombre annuel des décès est de 594, le rapport du nombre des habitants à ce nombre-là sera de 24 à 1.

Nombre des habitants de toute la Frise.

Voici les nombres des habitants de tous les bailliages et des villes avec leurs domaines, d'après le recensement fait dans le mois de Juin de l'année 1748.

Oostergoo	Habitants	Westergoo	Habitants
Leeuwarderadeel	3089	Menaldumadeel	3694
Ferwerderadeel	3226	Franekeradeel	2210
Westdongeradeel	3373	Barradeel	3065
Oostdongeradeel	3614	Baarderadeel	2716
Colummerland	3368	Hennaarderadeel	1909
Achtkarspelen	4051	Wonseradeel	6817
Dantumadeel	2802	Hemelummeroldephart	2307
Tietjerksteradeel	5443	Wymbritzeradeel	3995
Smallingerlandt	4427	't Bild	3288
Idaarderadeel	2602		
Rauwerderhem	1230		
	37225		30001

Zevenwolden.

	Habitants		Habitants
Uitingeradeel	2208	Gaasterland	1960
Aengwirden	552	Jemsterland	1657
Doniawerstal	1541	Opsterland	5803
Haskerland	2491	Stellingwerf côté-est	2040
Schooterland	3677	,, côté-ouest	3390
	10469		14850

1) Les annales hollandaises de l'année 1747, Janvier, p. 56.

2) Annales de l'année 1748, Janvier, p. 2.

3) ,, ,, ,, 1749, ,, , p. 1.

Les villes

	Habitants		Habitants
Leeuwarden	14270	Dans Oostergoo	37225
Bolsward	2878	,, Westergoo	30001
Franeker	3671	,, Zevenwolden	25319
Sneek	3958	,, les villes	42650
Dockum	2676	Dans toute la Frise 1)	135195
Harlingen	7404		
Stavoren	1390		
Slooten	436		
Workum	3063		
IJlst	989		
Hindeloopen	1915		
Dans toutes les villes	42650 habitants.		

L'opinion générale, c'est qu'il y a en Frise environ 36000 familles; dans 4 familles il y aurait donc en moyenne 15 personnes.

En 1742 il y avait à Harlingen 1560 maisons environ, et pendant 4 ans (1738—1741) 1313 personnes y sont mortes; cela fait 328 par an en moyenne. Il en résulte que le nombre des habitants de cette localité est au nombre annuel des décès environ dans le rapport $22\frac{3}{5}$: 1. Il est fort probable que 6 ans plus tard le nombre annuel des décès y a été plus petit: on trouvera donc un nombre un peu plus grand que $22\frac{3}{5}$.

Je possède les nombres des décès pour différentes villes de la Frise, mais seulement pour l'année 1746. En cette année 53 personnes sont mortes à Stavoren, 14 à Slooten, 99 à Workum, 44 à IJlst, 85 à Hindeloopen, ce qui fait 295 et tout. Il en résulte que dans les 5 villes nommées le nombre total des habitants a été au nombre des décès qui se sont produits en cette année comme $26\frac{2}{5}$ est à 1. Mais la mortalité pendant une année ne nous permet pas d'arriver à une conclusion certaine. Je n'ai donné ce rapport que pour faire voir qu'il ne s'écarte pas beaucoup des valeurs correspondantes trouvées antérieurement.

1) Ceci est tiré du „Récit détaillé des troubles en Frise" p. 75, 76.

Nombre des habitants de la ville de Monnikendam.

Feu M. MATTHÉE HUISINGA, docteur en médecine, a compté fort exactement au commencement du mois d'Avril de l'année 1744, avec l'aide d'une autre personne, le nombre des habitants de cette ville. On dressa une liste des maisons en indiquant les noms du chef on des chefs de famille et les nombres des habitants. On trouva en tout 1984 âmes. Parmi ce nombre sont comprises les personnes demeurant près des portes de la ville sur le boulevard, où il n'y a toutefois qu'un petit nombre de maisons. Les hameaux Overleek, Katwoude, Laage Dijk, ainsi qu'une partie de Purmer, font partie de la commune (klokkenslag) de Monnikendam; mais parce que ces hameaux ont des noms spéciaux et sont séparés de la ville, ils n'ont pas été compris dans ce dénombrement.

Je ne possède les nombres des décès que pour 5 années (1735—1739). Le nombre total a été de 488. Le nombre des habitants y est donc au nombre annuel des décès environ comme 20 est à 1. Mais le premier des deux derniers nombres devra être un peu plus grand, attendu que parmi les enterrés il y a aussi des personnes étrangères, appartenant aux communes nommées.

A Overleek on a compté plus tard 73, à Katwoude 45 et à Laage Dijk 22 habitants, ce qui fait 140 habitants en tout. En supposant que 6 d'entre eux soient enterrés chaque année à Monnikendam, et de plus que 6 ou 7 proviennent de Purmer ou d'autres localités hors la ville, de sorte que le nombre annuel des décès peut être évalué à 85, on trouve que le nombre des habitants est au nombre annuel des décès comme $23\frac{1}{3}$ est à 1.

Nombre des habitants de la ville de Schiedam.

Le 13 Octobre 1747, à l'occasion de la collecte faite auprès des habitants de toute la Hollande, on a compté tous les habitants, jeunes et vieux, de cette ville; on a trouvé qu'ils étaient au nombre de 6044. 1) Mais quant aux nombres des décès, je ne

1) Les Annales néerlandaises du mois d'Octobre de l'année 1747, p. 766.

les possède que depuis le commencement de l'année 1731 jusqu'à la fin de l'année 1741. Pendant ces 11 années 2394 personnes y sont mortes; cela fait en moyenne 218 par an. Si ce sont là les décès notés par le Secrétariat, comme je le suppose, le nombre devrait être pris un peu plus grand encore. J'admets qu'il faut l'augmenter de 10; le nombre annuel est alors de 228, par conséquent le nombre de la population sera au nombre annuel des décès comme $26\frac{1}{2}$ est à 1. Au commencement de l'année 1747 il y avait dans cette ville 105 distilleries, 3 brasseries, 19 boulangeries, 5 commerces de farine, 7 moulins à l'usage des distillateurs et 3 moulins où l'on brise le blé pour les boulangers 1). Je mentionne ceci, parce que dans ces distilleries il doit y avoir beaucoup d'ouvriers pour la plupart étrangers; d'où résulte que le rapport dont nous avons parlé doit avoir été altéré quelque peu.

Nombre des habitants de la ville de Gouda.

Messieurs les Etats de Hollande et de la Frise occidentale ont établi par décret du 19 Avril 1715, et d'après les placards du 28 Mai 1716, un impôt de famille qui devait être payé avant le premier Novembre 1716. A cette occasion la population de Gouda a été comptée en cette dernière année. Monsieur le secrétaire VAN EIK m'a communiqué un extrait du livre du Secrétariat de la ville de Gouda, d'après lequel on a compté 17000 personnes dans cette ville, y compris les faubourgs, c. à. d. toute la partie du pays dont les habitants se font enterrer dans le cimetière de la ville. 2)

Je trouve quelque difficulté à découvrir pour cette ville le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des naissances et des décès, quoique pour l'époque considérée on ait noté le nombre des baptêmes ainsi que celui des décès pour les différents cultes séparément. — Les baptêmes n'ont pas été indiqués chez les luthériens pour l'année 1706. Dans les deux années mentionnées ci-dessous, les nombres des baptisés dans les différentes églises ont été les suivants

1) Les mêmes Annales du mois de Janvier de l'année 1747, p. 43.

2) Comme le nombre donné est rond, je me demande si ce nombre mérite confiance et s'il ne devrait pas être plus petit.

Année	Protestants: Réformés	Wallons	Remonstrants	Luthériens	Catholiques: v. d. Kroon	van Beek	Frères mineurs	Jésuites	Nombre total
1706	283	1	102	5	19	43	61	70	584
1707	316	3	97	6	25	44	66	73	630

Mais lorsque l'église des Jésuites fut fermée, en 1708, par ordre du gouvernement, 33 enfants seulement avaient été baptisés chez les Jésuites dans le commencement de cette année; pas un enfant n'a été baptisé chez eux pendant les trois années suivantes, et un seul enfant pendant chacune des deux années suivant celles-là. Le nombre des enfants baptisés chez les deux prêtres nommés n'a pas augmenté par la fermeture de l'église des Jésuites, mais le nombre des baptêmes a augmenté de 40 chez les frères mineurs. Que sont donc devenus les autres, au nombre de plus de trente? Il n'est pas admissible qu'en un ou deux ans le nombre des naissances ait diminué si fortement, surtout parce qu'il n'y a pas eu alors de mortalité extraordinaire dans cette ville. Peut-être les enfants en question ont-ils été baptisés par les Jésuites ailleurs ou secrètement.

Le nombre des baptêmes dans l'église réformée est resté à-peu-près constant à l'époque du dénombrement. Pendant 11 ans, depuis 1711 jusqu'à 1721 inclusivement, 3541 enfants ont été baptisés chez les réformés hollandais et français ensemble; cela fait 322 par an en moyenne. Pendant les deux années mentionnées plus haut 611 enfants appartenant aux trois autres cultes ont été baptisés en tout; cela fait 305 ou 306 par an. Je ne tiens compte que de ces années-là, parce que les nombres relatifs aux années suivantes sont incertains. Le nombre total des baptêmes est donc de 628. J'en ajoute encore 16 à cause de ceux qui meurent avant le baptême, 4 pour les enfants nés chez les anabaptistes et 2 pour certains remonstrants qui ne font pas baptiser leurs enfants 1). Le nombre annuel des naissances à Gouda serait donc de 650.

On peut aussi trouver le chiffre des naissances par analogie avec le chiffre correspondant de Harlem (dont la statistique suit) et dire: sur 27000 habitants il naît 1042 enfants chaque année, sur 17000 il en naît donc 656. Ce résultat ne diffère pas beaucoup de celui que nous venons d'énoncer.

1) Il est possible que ce dernier nombre doit être plus grand que 2.

Pendant 11 années, savoir 5 années avant et 5 années après le dénombrement outre l'année du dénombrement elle-même (1711—1721), les décès suivants ont eu lieu à Gouda

	Habitants		Habitants
En 1711	537	En 1717	623
1712	510	1718	572
1713	541	1719	772
1714	634	1720	720
1715	571	1721	833
1716	604		
	3397		3520

Le nombre total des décès est de 6917, c. à. d. de 629 par an, en moyenne. Je ne suis pas certain que les personnes mortes dans l'hôpital de la ville ou dans d'autres hôpitaux sont comprises parmi ce nombre. On n'enterre dans cette ville que dans l'église St. Jean, dans le cimetière et quelquefois, mais rarement, dans l'église française. M. JEAN VAN BEEKHOVEN DE WIND qui a été pasteur en cette ville en 1734, 1735 et 1736, et qui occupe maintenant la même fonction à Harlem, m'a fourni une statistique exacte de la communauté des anabaptistes à Gouda. Le nombre des membres était alors de 54, savoir

Hommes mariés	11	Femmes mariées	11
Hommes mariés, dont les femmes n'appartiennent pas à la communauté	3	Femmes mariées, dont les maris n'appartiennent pas à la communauté	4
Veufs	3	Veuves	8
Jeunes gens	6	Jeunes filles	8
	23		31
Garçons qui ne sont pas membres de la communauté	16	Filles qui ne sont pas membres de la communauté	10
Hommes	39	Femmes	41

Pendant les trois années dont nous parlons, une seule de ces personnes, une veuve de 70 ans, est morte.

Mais si nous faisons abstraction des enfants catholiques que les Jésuites peuvent avoir baptisés en secret, ainsi que des enfants remonstrants qui peut-être n'ont pas été baptisés, et qu'alors nous

prenons la somme des enfants baptisés dans cette ville pendant 32 ans (1701—1732), nous trouvons le nombre 18272 1); nous trouvons donc annuellement, en moyenne, 571 enfants baptisés. En ajoutant 14, nombre des enfants qui meurent avant le baptême, et 4, celui des enfants nés chez les anabaptistes, on trouve que le nombre annuel des naissances est de 589. Mais si de la même manière nous calculons le chiffre des naissances pour 5 années voisines de l'année du dénombrement, savoir pour les années 1714—1718, le nombre annuel moyen des naissances sera de 604, et le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des naissances sera de 28 à 1. — La raison pour laquelle ce rapport n'a pas exactement la même valeur pour différentes localités, c'est que dans l'une d'elles le nombre des couples mariés est relativement beaucoup plus grand que dans l'autre; il y a de plus dans une localité un plus grand nombre de domestiques que dans l'autre, etc. Pour la même raison le rapport du nombre total des habitants au nombre annuel des décès est lui aussi quelque peu variable. Pendant les 32 années dont nous avons parlé, 601 personnes en moyenne sont mortes chaque année à Gouda.

Statistique des habitants de Harlem.

A la fin de l'année 1707 le nombre des familles habitant cette ville a été compté par ordre du gouvernement de cette ville. On y trouva 5256 familles réformées, 242 luthériennes, 41 remonstrantes, 917 anabaptistes, 2175 catholiques, et 31 n'appartenant à aucun de ces cultes. Cela fait 8662 familles en tout. On a noté qu'un nombre de 5789 fils de famille vivaient chez leurs parents.

Deux choses me sont inconnues; d'abord j'ignore quel était le but de ce dénombrement; en second lieu je ne sais pas si toutes les familles comptées habitaient Harlem et le domaine environnant, ou bien la ville seule, ce qui peut faire une grande différence.

En 1744 les accoucheuses de cette ville ont reçu l'ordre de communiquer de temps en temps au gouvernement une liste des enfants nés à Harlem et dans le domaine environnant. Voici cette statistique pour 8 années.

1) Consultez à ce sujet mes „Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine, p. 181.

Naissances à Harlem.

Année	Fils	Filles	Ensemble		Nés morts	Jumeaux		Nés vivants
1745	661	612	1273		42	13		1231
1746	613	621	1234		51	15		1183
1747	547	582	1129	parmi	34	28	Donc	1095
1748	557	497	1054	lesquels	35	35	en tout	1019
1749	545	502	1047		35	35		1012
1750	617	534	1151		46	19		1105
1751	487	446	933		40	12		893
1752	562	476	1038		40	25		998

Le vénérable JEAN VAN BEEKHOVEN DE WIND, docteur en médecine, qui m'a communiqué ces données, donne la raison suivante pour laquelle le nombre annuel des naissances a été plus petit dans les cinq dernières années que dans les deux premières: dans ces deux années on a compris dans la liste les enfants nés avec l'assistance de ces accoucheuses à Spaarendam (où en ce temps il n'y avait pas d'accoucheuse) ainsi que la plupart des enfants nés dans la seigneurie de Heemstede (qui est vaste et s'étend jusqu'à Harlem à-peu-près), mais dans la suite on a noté séparément les enfants nés dans ces localités. En prenant donc la moyenne des 6 dernières années, on voit qu'en ce temps 1020 enfants sont nés annuellement à Harlem. Il faut savoir que j'ai pris arbitrairement le nombre 40 pour celui des enfants nés morts pendant la dernière année.

Le 31 Juillet de l'année 1748 on a compté par ordre du gouvernement le nombre des habitants de Harlem et de son domaine. On trouva dans la ville 7025 familles, composées de 18929 personnes au-dessus de 12 ans et de 5766 enfants en-dessous de cet âge; et dans le domaine environnant 447 familles, composées de 1057 personnes au-dessus de 12 ans et de 529 enfants en-dessous de cet âge. Cela fait en tout 7472 familles, composées de 26281 personnes. Cette statistique provient de personnes bien informées; on dit toutefois que dans ce nombre ne sont compris ni les orphelins ni les personnes qui se trouvaient dans les hôpitaux, mais bien celles qui habitaient les fondations pour vieilles gens (hofjes). Le nombre total des habitants doit donc être de 26800 environ. En moyenne 10 familles s'y composent donc de 36 personnes, et le nombre total des habitants est au nombre annuel des enfants nés

vivants comme $25\frac{9}{10}$ est à 1, d'après la statistique des 6 dernières années bien entendu. Quant aux nombres des décès à Harlem, je ne trouve ces nombres dans mes notes que pour les années 1742, 1745, 1746, 1747 et 1748; pour ces années le nombre total a été de 5412; cela fait 1082 par an en moyenne. J'ai trouvé plus tard qu'en 1749 1300 personnes y sont mortes, et 1442 l'année suivante. En 1751 le nombre des décès était de 1167 et en 1752 de 1024.

Le directeur de l'hôpital m'a fait savoir que les décès survenus en 1740 dans cette institution ne sont pas mentionnés dans les régistres mortuaires ordinaires, et que le nombre de ces décès est de 50 par an en moyenne; ils forment donc la $25^{\text{ième}}$ partie environ du nombre total des décès. Je trouve dans mes notes que le nombre des décès survenus en 1742 est de 932. NICOLAS DUIN 1) raconte que ce nombre provient du secrétariat de Harlem, mais que d'après sa propre statistique mensuelle le nombre des décès en cette année a été de 968. Ces deux nombres peuvent cependant être mis d'accord, car le dernier comprend les décès survenus dans l'hôpital lesquels (de même qu'à Amsterdam) ne sont pas mentionnés dans les livres du secrétariat. Or, les nombres relatifs aux quatre autres années proviennent également du secrétariat selon toute probabilité et doivent donc être augmentés de 43. Pendant les cinq premières années 1116 personnes en moyenne sont mortes chaque année: en d'autres termes, le nombre des habitants est au nombre annuel des décès comme 24 est à 1. La raison pour laquelle je n'ai pas tenu compte des années 1749 et 1750, c'est qu'il y a eu alors des mortalités extraordinaires.

La population de Harlem diminue considérablement; en effet en 1622 les Etats de Hollande ont jugé bon de faire payer un impôt personnel, et alors on a compté 39455 habitants dans la ville et 30150 habitants dans 36 villages faisant partie de son domaine 2).

Pendant 10 ans (1701—1710) 8162 baptêmes ont eu lieu dans la grande église de Harlem, et 158 dans celle des réformés français; cela fait 8320 en tout ou 832 par an en moyenne. Si l'on ajoute 21 à ce nombre à cause des enfants morts avant le

---

1) Dans ses „Remarques sur trois hivers sévères" p. 186, Harlem, 1743.

2) „Description de Harlem" par SAMUEL AMPSING, p. 38, Harlem, 1628.

baptême et qu'on admet que le nombre moyen des enfants est le même dans les familles appartenant à d'autres cultes, on trouve (en se basant sur le statistique de 1707) que le nombre annuel des enfants nés vivants à Harlem a été de 1406. Pendant les 10 années 1703—1712, 14158 décès ont eu lieu dans cette ville; cela fait 1416 à-peu-près par an. Je pense que les décès survenus dans l'hôpital ne sont pas compris dans ce nombre. Je n'ai pas tenu compte de l'année 1702, attendu qu'alors il y a eu une mortalité extraordinaire: on a compté alors 2577 décès 1).

Pour déterminer tant bien que mal le nombre des anabaptistes à Amsterdam, j'ai tâché d'obtenir la statistique des naissances dans leur communauté à Harlem. Le docteur VAN BEEKHOVEN DE WIND que j'ai nommé antérieurement m'a envoyé à ma demande la statistique suivante, contenant les nombres des personnes âgées qui pendant quinze années successives y ont été baptisées dans les trois communautés des anabaptistes. La voici

Année	Nombre	Année	Nombre	Année	Nombre
1700	36	1705	33	1710	43
1701	33	1706	48	1711	45
1702	42	1707	52	1712	37
1703	35	1708	67	1713	34
1704	61	1709	35	1714	34

Cette statistique fait voir qu'en 15 ans 635 personnes ont été baptisées; cela fait 127 en trois ans, en moyenne. Mais il y a encore deux autres communautés à Harlem, les anabaptistes de Dantzig et ceux de Groningue; leurs statistiques commencent en 1716. La première communauté compte environ 90 membres, la seconde 20 à peine. Or, comme il y a 1600 membres à Amsterdam, tant flamands réunis qu'anabaptistes du Waterland, et qu'il y a parmi eux 53 baptêmes par an, il en résulte que sur 110 membres il doit y avoir environ 4 baptêmes par an. Le nombre total des baptêmes chez les anabaptistes de Harlem doit donc avoir été de 46 en moyenne. Or en 1707 il y avait à Harlem 917 familles appartenant à ce culte; sur 20 familles 1 personne environ est donc baptisée chaque année. Et si de 5256 familles naissent 853 enfants par an, il en résulte que de 917 familles il doit en naître 149; c'est là environ le nombre des enfants nés chez les ana-

1) „Remarques, etc." p. 185.

baptistes de Harlem en 1707. Ce résultat pourra nous être utile plus tard, lorsqu'il s'agira de déterminer le nombre des naissances à Amsterdam.

M. PIERRE DE HOLLANDER m'a communiqué pour un assez grand nombre d'années la statistique des baptêmes, des mariages et des décès de la ville de Harlem et encore une notice sur le nombre des couples dont le mariage a été annoncé à l'Hôtel de Ville. Les 5 premières années ne se rapportent qu'à la Cathédrale.

	Nombre des couples.				
	Année 1729	1730	1731	1732	1733
Célibataires et demoiselles	162	160	177	160	177
Veufs et demoiselles	59	66	54	71	54
Célibataires et veuves...........	22	43	24	20	30
Veufs et veuves	62	62	34	45	53
	305	331	289	296	314

La statistique des 5 années suivantes donne le nombre des couples dont le mariage a été annoncé à la Cathédrale et à l'Hôtel de Ville.

Année 1734	Cathédrale	Hôtel de Ville	Somme
Célibataires et demoiselles.	126	103	229
Veufs et demoiselles......	55	24	79
Célibataires et veuves	23	15	38
Veufs et veuves..........	27	26	53
	231	168	399 couples
Année 1735			
Célibataires et demoiselles.	133	96	229
Veufs et demoiselles......	56	40	96
Célibataires et veuves.....	25	18	43
Veufs et veuves..........	45	19	64
	259	173	432 couples
Année 1736			
Célibataires et demoiselles.	147	85	232
Veufs et demoiselles......	42	22	64
Célibataires et veuves.....	19	13	32
Veufs et veuves..........	30	20	50
	238	140	378 couples

Année 1737	Cathédrale	Hôtel de Ville	Somme
Célibataires et demoiselles.	136	81	217
Veufs et demoiselles......	41	45	86
Célibataires et veuves.....	22	27	49
Veufs et veuves..........	40	15	55
	239	168	407 couples
Année 1738			
Célibataires et demoiselles.	143	79	222
Veufs et demoiselles......	54	40	94
Célibataires et veuves.....	27	18	45
Veufs et veuves..........	41	24	65
	265	161	426 couples

En 1739 on a annoncé à l'Hôtel de Ville le mariage de

106 célibataires et demoiselles,
26 veufs et demoiselles,
11 célibataires et veuves,
14 veufs et veuves,

c. à. d. de 157 couples en touts. Mais de ce nombre il faut retrancher environ la douzième partie pour avoir les couples qui se marient réellement à Harlem.

J'ai pris la somme de tous les couples nommés et j'ai calculé, pour Harlem aussi bien que pour Amsterdam, quels sont sur 1000 couples les nombres qui appartiennent aux différentes catégories. Voici le résultat de ce calcul.

	Harlem	Amsterdam
Célibataires et demoiselles ..	555	704
Veufs et demoiselles........	201	118
Célibataires et veuves	95	113
Veufs et veuves............	149	65
	1000 couples	1000 couples.

Sur un même nombre de couples qui se mariaient il y avait à Harlem 39 célibataires contre 49 à Amsterdam: et autant de fois qu'il y avait 21 veufs à Harlem, autant de fois il y en avait 11 seulement à Amsterdam sur un même nombre de mariages. A Harlem le nombre des veufs qui épousent des veuves est bien plus considérable qu'à Amsterdam, du moins il en a été ainsi dans les années précédentes.

Troisième Partie.

Recherches sur l'Etat du Genre humain à Amsterdam et nombre des habitants de la Hollande et de la Frise occidentale.

Il est suffisamment connu que le nombre de ceux qui habitaient la ville d'Amsterdam il y a un siècle était beaucoup plus petit que le nombre actuel. Dans la Chronique de Hoorn, par VELIUS, il est dit qu'en 1622 on leva en Hollande un impôt personnel d'un florin pour toute personne jeune ou vieille; dans la ville de Hoorn cet impôt fut payé au mois de Mai de l'année suivante. On a trouvé un décret du 29 Septembre de l'année en question 1), où il est ordonné que tous ceux qui sont restés inconnus lors du payement de l'impôt personnel précédent sont obligés de se faire connaître; celui qui ne se ferait pas connaître endéans un ou deux moys payerait une amende de 4 florins ou de 25 florins respectivement. Ceux qui avaient été absents devaient également se faire connaître et étaient passibles des mêmes amendes. Le dénombrement de la population d'Amsterdam a été fait en cette année. CORNEILLE COOTEN DE BLOEMSWAARD, autrefois échevin à Loenen, m'a montré une feuille imprimée où j'ai trouvé les nombres suivants.

Les 20 quartiers de la ville administrés par les échevins et les capitaines comprenaient en 1622 les nombres suivants d'habitants.

PAUL HEEMSKERK....	8450	CORNEILLE CANTER...	7317
PIERRE REAEL.......	2420	GILLES JANSZ. BETSZ..	2728
JACQUES JACOBZ HINLOOPEN...........	2755	ADRIEN PIETERZ. RAAP	17639
VOLKERT OVERLANDER	4708	ANDRÉE BICKER......	2730
JEAN GISBERT OLIJVEBOOM..............	2168	CLAAS JACOBSZ. HARENCARSPEL...........	3819
JACQUES WILLEKENS .	2541	PIERRE EGBERGTSZ. VINK.............	4289
JACQUES BICKER......	2095	JEAN WITZEN........	5594
Docteur ALBERT COENRAATS.............	5757	JACQUES SYMONSZ. VRIES.............	3267
ABRAHAM BOOM......	2250	HILLEBRANT SCHELLINGER............	2551
JACQUES PIETERSZ. HOOGKAMER.......	2159	PIERRE BAS.........	14349
	35303		64283

Somme totale des habitants de la ville: 99586.

1) CAU, Livre des décrets (Placcaatboek), première partie, 6ième livre. Col. 1540 et 1541. La Haye, 1658.

Etat de la population dans la ville et hors la ville d'Amsterdam, en 1622.

Population totale de la ville	99586	Diemen et Diemerdam	651
En-dehors de la porte St. Antoine	1789	Ouderkerk	1174
En-dehors de la Reguliers-poort	1476	Waverveen	657
En-dehors de la Heilige-wegs-poort	1723	Bokshol	389
En-dehors de la porte de Harlem	387	Amstelveen	3510
Population totale de la ville et des faubourgs	104961 2)	Slooten et Slooterdijk	1607
		Loenen	435 1)
		Loosdregt et Overtoom	684
		Population des villages soumis à la juridiction d'Amsterdam	9107

Cette statistique semble comprendre tous les citoyens sans exception, riches et pauvres; même ceux qui se trouvaient à l'hôpital, pour lesquels les régents devaient payer d'après les revenus de cette institution; du moins cela semble résulter de ce que dit COMMELIN 3): cet auteur raconte qu'en 1623 un impôt personnel fut levé à Amsterdam et qu'il n'y avait alors parmi les 700 malades que contenait l'hôpital qu'un seul citoyen de la ville, pour lequel les régents payaient.

On trouve dans le livre de COMMELIN une statistique des décès survenus à Amsterdam pendant une période de 7 années voisines de l'époque du dénombrement, savoir la période 1622—1628. En 1622, 4141 personnes y sont mortes. En 1623, 1624 et 1625 la

1) Parmi ce nombre sont probablement compris les habitants de Mynden.

2) Ce nombre est inférieur de 20 à celui de la population d'Anvers, d'après le dénombrement de 1568; en effet, dans cette ville le nombre des citoyens était de 89996 et celui des étrangers de 14985. Voyez GUICCARDIN, Description de la Néerlande, p. 137, d'après CAR. SCRIBAN. Orig. Antwerp. Ch. 8.

3) Le même auteur, sixième livre, p. 1180. En cet endroit il est dit aussi que du 11 Août 1617 jusqu'au 11 Août 1624, 32532 personnes sont mortes à Amsterdam (parmi lesquelles un grand nombre ont péri par la peste) et que pendant la même période 52537 enfants ont été baptisés dans les églises publiques, outre ceux appartenant à d'autres cultes. Ce dernier nombre toutefois est absolument erroné. Il faut sans doute lire 12537, c.à.d. 1791 par an. Cette erreur a été reproduite par THOMAS SHORT M. D. dans ses „New Observations Naturel Etc. ou City-, Town- and Country-Bills", Londres 1751. Consultez aussi SUSZMILCH, Gottl. Ordnung, p. 61.

peste a sévi à Amsterdam; pendant ces trois années il y a eu 24505 décès, c.à.d. environ 12000 plus que la moyenne. Pendant les trois années suivantes la ville était exempte de peste. En 1626, 4425 personnes sont mortes à Amsterdam, l'année suivante pas plus de 3976, et en 1628, 4497 personnes seulement, d'après COMMELIN: je ne sais toutefois ce que le mot „seulement" veut dire ici, attendu que le dernier nombre des décès est supérieur au précédent. A ma demande on a tiré les nombres des décès des régistres mortuaires du secrétariat de cette ville. En 1611 ce nombre était de 2068; on ne pouvait trouver les nombres relatifs aux cinq années suivantes; pendant les 16 années qui suivaient celle-là les nombres des décès ont été les suivants.

Année	Décès	Année	Décès	Année	Décès	Année	Décès
1617	8449	1621	2838	1625	6521	1629	6944
1618	4157	1622	4125	1626	3987	1630	5413
1619	3464	1623	5927	1627	4160	1631	4160
1620	3098	1624	11879	1628	8753	1632	4257

Pendant ces seize années le nombre annuel moyen des décès a donc été de 5196. Pendant les sept dernières années (pendant les années précédentes il y avait quelquefois des périodes où la peste sévissait) le nombre annuel des décès était de 4668 en moyenne. Si l'on excepte encore l'année 1629, on trouve une moyenne annuelle de 4288, et si l'on adopte ce résultat, le nombre total des habitants a été au nombre annuel des décès pendant la période considérée comme $24\frac{1}{2}$ à-peu-près est à 1.

Je suis étonné de voir que les nombres des décès donnés par COMMELIN diffèrent tant des nombres précédents; j'ignore quels étaient alors les nombres des décès dans l'hôpital.

Année	Décès
1617	8449
1618	4121
1619	3468
1620	3483
1621	3160
1622	4141
1623	5929

Dans un manuscrit de LAURENS REAEL on trouve les nombres des décès pour les années 1617—1623, comme on peut le voir ci-contre. Les nombres relatifs aux années 1620 et 1621 diffèrent beaucoup des nombres correspondants donnés plus haut; il est possible que la liste de REAEL comprend les personnes mortes à l'hôpital.

Des naissances et des baptêmes à Amsterdam.

Messieurs les maires de cette ville se sont fait communiquer à ma demande (que je leur ai faite à la fin de l'année 1739) les nombres des enfants baptisés dans tout le domaine qui tombe sous leur juridiction, depuis le premier Janvier jusqu'au dernier Décembre de l'année 1739 inclusivement. On a noté en outre les enfants nés chez ceux qui n'ont pas coutume de les faire baptiser, et les décès là où l'on ne pouvait connaître le nombre des naissances. Voici les nombres dont il s'agit.

Nombre des baptêmes chez les réformés en 1739.

	Enfants
Dans la vieille église	441
,, la nouvelle église	905
,, l'église de l'est	117
,, ,, ,, l'ouest	771, et 2 personnes adultes
,, ,, du sud	596
,, ,, ,, nord	500, et 1 personne adulte
,, la chapelle ,,Oude-Zijds"	6
,, ,, ,, ,,Nieuwe-Zijds"	108
,, l'église de l'Amstel	257
,, ,, ,, l'île	45 1)
Nombre total des baptêmes dans les églises réformées	3822 et 3 adultes.

Nombre des baptêmes chez les autres protestants en 1739.

Dans l'église épiscopale anglaise 8 enfants ont été baptisés.

Le nombre des enfants baptisés dans les églises luthériennes ou baptisés à domicile par les ministres de ce culte a été de 1528.

Les remonstrants ont baptisé dans leur église et à domicile 29 personnes. Parmi elles se trouvaient 2 personnes adultes et 1 enfant né en-dehors du domaine de la ville; toutefois je conserve le nombre donné, parce que chez les remonstrants se trouvent

1) On avait écrit 52, mais j'ai trouvé plus tard, en consultant moi-même le livre des baptêmes, que la véritable nombre est 45.

quelques personnes qui ne sont baptisées qu'après avoir atteint l'âge de la raison.

Je ferai suivre ici les nombres des enfants baptisés chez les catholiques dans l'ordre où l'on me les a communiqués.

Nombre des enfants baptisés chez les catholiques en 1739.

Par les moines.

Par le Père	HILARION BOURDON (Boommarkt)	55
,, ,, ,,	JACQUES JANSSEN („Hôtel de Ville de Hoorn", Nieuwe-Zijds Agterburgwal)	80
,, ,, ,,	PIERRE BECKAFF (près de la Tour de la Jan Roden-poort)	56
,, ,, ,,	JEAN RADEMAKÉR (Joden-Breestraat)	299
,, ,, ,,	JOSÈPHE DE LONGAS („Boomtje", Kalverstraat)	338
		828

Par les prêtres séculaires.

Par Monsieur	DIEROUT (Begijnhof)	53
,, ,,	CAVELLIER („Posthoorn", Brouwersgraft)	167
,, ,,	CAVELLIER („Pool", Buitenkant)	69
,, ,,	OEMS (Nieuwezijds Agterburgwal et Boommarkt)	72
,, ,,	TOP („Papegaay", Kalverstraat)	16
,, ,,	SCHOUWE (Kerkstraat)	80
,, ,,	REINIERS (Haantje-hoek-steeg)	41
,, ,,	DE WEERT (Beerebijt)	60
		558

Par les prêtres de la clérésie (Jansénistes).

Par Monsieur	JERÔME DE BOK (Vinkestraat)	23
,, ,,	GISTENIUS PRIEM (Voorburgwal près de la Lijnbaansteeg)	5
,, ,,	ANTOINE MEYERE (Bernards- ou Barne-steeg)	4
,, ,,	CORNEILLE VERHEUL (Lauriergraft, orphelinat catholique pour garçons)	16
,, ,,	JEAN VAN HARTEFELD (Oude Teertuinen)	1
,, ,,	HENRI DE HAAN („Maagdenhuis", Spui)	4
,, ,,	JOACHIM BERVERLING (Brouwersgraft)	23
,, ,,	JEAN VAN STIPHOUT (Keizers-straat)	8
		84

Le nombre total des enfants catholiques baptisés qui sont mentionnés dans cette liste est de 1470. Il faut en ajouter encore 14 qui ont été baptisés du premier Janvier au 22 Mars 1739 par Monsieur LAGEMAN (prêtre à l',,Etoile'' dans la Spinhuissteeg) qui a été révoqué depuis et qui a fait un long séjour dans la prison. Le nombre total des baptêmes chez les catholiques est donc de 1484.

De plus quelques enfants meurent avant le baptême. L'expérience a enseigné qu'à Broek-in-Waterland la vingt-huitième partie des enfants nés vivants meurt endéans 4 jours, et que la quarantième partie meurt endéans 2 jours; je me contenterai de cette dernière fraction pour trouver le nombre des enfants morts avant le baptême.

Nombre des enfants nés chez les anabaptistes.

Chez les anabaptistes beaucoup de personnes ne font pas inscrire leurs enfants nouveau-nés. En effet, chez les Flamands et Waterlanders réunis, qui tiennent leurs réunions près de la Tour et près de l',,Agneau'', on a noté que le nombre des naissances n'a été que de 42 en 1739, tandisque la même année 47 adultes ont été baptisés. Et quoique le nombre des baptisés de cette communauté diffère beaucoup d'une année à l'autre, le nombre moyen a été cependant généralement au-dessus de 50 à cette époque. J'ajouterai ici d'après le livre de cette église la liste des baptêmes qui ont eu lieu pendant 30 ans.

Année		Année		Année		Année		Année	
1710	55	1716	45	1722	36	1728	28	1734	46
1711	57	1717	40	1723	71	1729	49	1735	55
1712	43	1718	59	1724	70	1730	34	1736	28
1713	70	1719	84	1725	66	1731	56	1737	56
1714	54	1720	45	1726	40	1732	41	1738	73
1715	77	1721	81	1727	40	1733	70	1739	47
	356		354		323		278		305

Chez les mennonites on a baptisé en 1739 6 personnes adultes au ,,Soleil'' (tandisque 6 naissances seulement ont été notées), et 4 personnes adultes à l',,Arche de Noé''. Autrefois j'ai fixé à 80 le nombre de ceux qui sont baptisés annuellement chez tous les

anabaptistes et dans quelques autres petites communautés 1); je conserverai ce nombre et je calculerai en partant de lui quel est environ le nombre des enfants nés vivants dans toutes ces communautés. J'admets que le rapport des deux nombres est le même qu'à Harlem. Dans cette dernière ville 46 adultes sont baptisés contre 149 enfants nés vivants; il en résulte que lorsque 80 adultes sont baptisés, 259 enfants naissent vivants. Le nombre des anabaptistes et celui de quelques autres petites communautés donc doit être de 6400 à-peu-près. Ce nombre est plus grand que celui que j'avais adopté autrefois, mais alors je ne possédais pas encore le nombre des baptisés chez les anabaptistes de Harlem. Il m'était également inconnu que le nombre annuel des baptêmes chez les réformés ici à Amsterdam est à celui des communiants comme un peu plus de 3 est à 1.

Le nombre total des enfants baptisés chez les réformés, les luthériens, les remonstrants et les catholiques est de 6871. Et comme j'admets que sur 39 enfants baptisés un seul meurt avant le baptême, il en résulte que sur 6871 baptisés 176 meurent avant le baptême. En ajoutant à 6871 ce dernier nombre et celui des enfants nés chez les anabaptistes, on obtient le nombre 7301; c'est là le nombre des naissances dans toutes les communautés chétiennes d'Amsterdam.

Nombre des enfants juifs nés en 1739.

Les Juifs portuguais ont dit avoir enrégistré 123 enfants nés en 1739, savoir 67 garçons et 56 filles; mais ils ajoutèrent qu'ils ne connaissent pas exactement le nombre des filles, attendu que beaucoup d'accoucheuses ne prennent pas la peine de les noter. Pour corriger ce défaut tant bien que mal, j'admets que contre 52 garçons il naît 49 filles; d'où il résulte que 63 filles naissent contre 67 garçons. Je considère donc le nombre 130 comme celui des enfants nés chez les Juifs portuguais.

Les Juifs allemands prétendirent qu'on n'enrégistre pas les enfants nés chez eux; mais pour compenser ce défaut, SAMUEL LEVI, trésorier de ces Juifs, a communiqué les nombres des enterrements qui ont eu lieu pendant les six années suivantes.

---

1) Consultez mes „Hypothèses sur l'Etat de l'espèce humaine" p. 192.

Années	A Muiderberg. Hommes	Femmes	Garçons et filles	A Zeeburg. Hommes	Femmes	Garçons et filles	Somme
1734	14	13	6	16	26	227	302
1735	17	19	4	36	24	185	285
1736	18	20	3	45	31	337	454
1737	21	18	6	53	35	229	362
1738	22	15	3	25	31	243	339
1739	21	24	4	27	33	205	314
	113	109	26	202	180	1426 1)	2056

Cela fait 343 personnes par an, en moyenne. Pendant les six années en question 47911 décès ont eu lieu dans toute la ville, parmi lesquels 2056 décès de Juifs allemands et polonais, de sorte que le rapport du nombre des décès qui ont lieu dans toute la ville au nombre des décès de ces derniers Juifs est égal à 233 : 10. J'admets alors que le rapport entre les nombres des naissances a la même valeur, et je dis: Contre 223 enfants qui naissent dans les autres communautés, il en naît 10 chez les Juifs allemands et polonais; quel sera donc le nombre des enfants juifs, s'il en naît 7431 dans les autres communautés? On trouve que le nombre des enfants juifs est de 333. — Pour plus de clarté je répéterai encore une fois ici les nombres des enfants nés dans les différentes communautés religieuses.

Enfants de toutes les religions baptisés à Amsterdam en 1739.

Dans les églises réformées hollandaises.........	3676	baptisés
,, ,, ,, wallonnes....................	144	
,, l'église anglaise (Begijnhof)..............	2	
,, ,, ,, (O.-Zijds Agterburgwal)...	8	
Chez les luthériens...........................	1528	
,, ,, remonstrants......................	29	
,, ,, catholiques........................	1484	
Morts avants le baptême.....................	176	
	7047	enfants
Anabaptistes ou mennonites..................	261	
Juifs portuguais............................	130	
Juifs allemands, etc.	333	
Le nombre total des enfants nés vivants à Amsterdam en 1739 est donc de...............	7771	

1) Il est possible que les célibataires adultes et les demoiselles soient compris parmi ce nombre.

Dans l'année en question le nombre des décès aurait donc été inférieur de 260 à celui des naissances.

En 1740 on a fait une deuxième statistique qui m'a été remise par ordre des Messieurs nommés plus haut. La voici.

DAVID MENDEZ DA COSTA, trésorier de la nation juive portuguaise, a fait savoir le 9 Janvier 1741 à Messieurs les maires d'Amsterdam qu'en cette commune, du premier Janvier au dernier Décembre 1740, 60 garçons et 42 filles sont nés; mais le nombre des filles est inférieur au vrai nombre. On peut calculer le nombre des garçons en ajoutant celui des circoncis à celui des garçons qui meurent avant la circoncision. Le nombre des garçons baptisés chez les Chrétiens en 1740 a été au nombre correspondant des filles comme 151 est à 140, comme on le verra plus loin. Or si 151 garçons naissent contre 140 filles, le nombre des filles qui naissent doit être de 56 contre 60 garçons. En cette année le nombre des enfants nés chez les Juifs portuguais a donc été de 116.

Les Juifs allemands et polonais ont déclaré que chez eux 163 garçons sont nés et 109 filles seulement; mais ici la même remarque est applicable aux filles. Je dis donc que, comme 140 filles naissent contre 151 garçons, il doit naître 151 filles contre 163 garçons. Le nombre total des naissances est donc de 314, nombre qui correspond assez bien à celui des décès survenus chez cette nation.

Les anabaptistes flamands et waterlanders réunis ont déclaré que chez eux 8 garçons et 17 filles ont été enrégistrés; les mennonites du „Soleil" 8 garçons et 1 fille, ceux de l'„Arche de Noé" 1 garçon et 1 fille. Cela fait 36 enfants en tout, mais on sait que la plupart des parents ne font pas enrégistrer leurs enfants. — Le nombre des enfants baptisés chez les réformés en 1740 est inférieur d'un douzième environ au nombre correspondant à l'année précédente; c'est pourquoi je diminuerai de 20 le nombre des enfants nés en 1739 chez les anabaptistes, etc. et je prendrai le nombre 239. Dans les deux églises anglaises pas un seul enfant n'a été baptisé en 1740. — Si les accoucheuses étaient obligées de communiquer toutes les semaines, ou toutes les deux semaines, les nombres des enfants nés vivants et que ces communications étaient faites régulièrement, on pourrait connaître encore plus

exactement le nombre des naissances. Voici la statistique pour les autres communautés.

Nombre des enfants baptisés en 1740 dans les églises réformées.

	Garçons	Filles	Somme
Vieille église	194	182	376
Nouvelle église	438	416	854
Eglise de l'est	61	53	114
„ „ l'ouest	352	340	692
„ du sud	229	213	442
„ „ nord	266	240	506
Chapelle „Oude-zijds"	1	2	3
„ „Nieuwe-zijds"	62	49	111
Eglise de l'Amstel	121	120	241
„ „ l'île	15	16	31
Dans toutes les églises réformées hollandaises	1739	1631	3370
Vieille église wallonne et église de l'ouest	52	39	91
Nouvelle église wallonne	17	17	34
Chez les réformés français	69	56	125

Nombre des enfants baptisés ou nés dans les autres communautés et chez les Juifs.

	Garçons	Filles	Somme
Luthériens	776	695	1471
Remonstrants	7	13	20
Catholiques Jansénistes	32	34	66
Autres catholiques	699	651	1350
Enfants baptisés dans les autres communautés	1514	1393	2907
Enfants baptisés chez les réformés hollandais	1739	1631	3370
„ „ „ „ „ français	69	56	125
Nombre total des enfants baptisés	3322	3080	6402
Enfants morts avant le baptême	calculés d'après les		164
„ nés chez les mennonites	nombres des parents		239
„ „ „ „ juifs portuguais	60	56	116
„ „ „ „ „ allemands	163	151	314
Nombre total des enfants nés dans la ville d'Amsterdam			7235

En cette année le nombre des naissances aurait donc été inférieur de 536 au nombre correspondant pour l'année précédente.

Cela est dû sans doute en partie aux épidémies extraordinaires qui ont sévi en 1740; en effet, 10056 personnes sont mortes en cette année contre 7507 seulement en 1739. Une autre raison qui explique la différence, c'est qu'en 1740 le nombre des couples qui se mariaient a été inférieur de 169 à ceux qui se mariaient en 1739 (tandisque le nombre des mariages annoncés publiquement a été inférieur de 184).

Les nombres des naissances qui ont eu lieu à Amsterdam pendant quelques années, comparés aux nombres correspondants relatifs à des années postérieures.

Pour voir si les nombres des naissances diminuaient ou augmentaient, j'ai demandé les nombres des enfants baptisés dans les églises réformées vers ce temps et aussi pendant quelques années antérieures. Monsieur le commissaire JACQUES VAN LOON, maître d'église à l'église de l'Amstel, m'a fait communiquer les chiffres suivants tirés des livres de ces églises. Pendant 40 années (1700—1739) les nombres suivants de garçons et de filles ont été baptisés à l'église de l'Amstel.

Année	Garçons	Filles	Somme	Année	Garçons	Filles	Somme
1700	104	108	212	1720	91	100	191
1701	133	119	252	1721	108	115	223
1702	141	115	256	1722	113	97	210
1703	172	141	313	1723	129	128	257
1704	155	132	287	1724	112	106	218
1705	119	109	228	1725	127	120	247
1706	125	132	257	1726	118	98	216
1707	129	102	231	1727	91	107	198
1708	152	126	278	1728	103	82	185
1709	161	143	304	1729	125	102	227
1710	147	125	272	1730	139	110	249
1711	127	104	231	1731	146	119	265
1712	138	122	260	1732	141	122	263
1713	92	76	168	1733	111	126	237
1714	100	70	170	1734	120	94	214
1715	70	75	145	1735	133	115	248
1716	127	114	241	1736	113	108	221
1717	99	121	220	1737	111	111	222
1718	104	113	217	1738	98	119	217
1719	93	101	194	1739	130	127	257
	2488	2248	4736		2359	2206	4565

Le nombre total des baptisés pendant les 40 années en question est de 4847 garçons et de 4454 filles, c.à.d. de 9301 en tout.

Voici les nombres des enfants baptisés dans la vieille église pendant les mêmes années.

Année	Garçons	Filles	Somme	Année	Garçons	Filles	Somme
1700	234	229	463	1720	161	177	338
1701	230	222	452	1721	216	207	423
1702	246	237	483	1722	252	194	446
1703	227	205	432	1723	214	237	451
1704	197	219	416	1724	222	212	434
1705	241	181	422	1725	195	222	417
1706	201	221	422	1726	235	213	448
1707	233	179	412	1727	246	211	457
1708	237	205	442	1728	178	187	365
1709	232	206	438	1729	225	202	427
1710	236	233	469	1730	228	228	456
1711	245	201	446	1731	247	217	464
1712	196	222	418	1732	223	236	459
1713	195	194	389	1733	239	240	479
1714	222	232	454	1734	225	226	451
1715	211	176	387	1735	220	255	475
1716	199	184	383	1736	222	219	441
1717	212	212	424	1737	235	202	437
1718	213	213	426	1738	212	211	423
1719	199	208	407	1739	237	204	441
	4406	4179	8585		4432	4300	8732

Pendant 40 ans 8838 garçons et 8479 filles, 17317 enfants en tout, ont donc été baptisés dans cette église. Pour ne pas être trop long, je ne donnerai pas les chiffres relatifs à chaque année séparément pour les autres églises. Pendant ces 40 années 341 garçons et 322 filles ont été baptisés dans la chapelle „Oude-Zijds"; et dans l'église de l'île pendant ce même temps 629 garçons et 589 filles. Je possède aussi les chiffres de l'église du nord pour les garçons et pour les filles separément. La somme totale des enfants qui y ont été baptisés pendant ces 40 années est de 27281. Dans l'église du sud 19452 enfants ont été baptisés pendant ce même temps; toutefois les enfants baptisés en 1727 ne sont pas compris dans ce nombre. Pour ne pas donner trop

de peine à ceux à qui j'avais demandé de compter pour moi les nombres des baptisés, je me suis contenté pour les églises suivantes de demander les nombres relatifs à trois années successives. Le monsieur prénommé m'a communiqué, d'après les livres de la nouvelle église, les nombres des garcons et des filles qui y ont été baptisés en 1700. en 1701, en 1702, en 1736, en 1737 et en 1738; d'après les livres de l'église de l'ouest, les nombres de ceux qui furent baptisés en 1701, en 1702 et en 1703; d'après ceux de l'église de l'est, les nombres des garçons et des filles séparément pour les années 1701, 1702, 1703, 1707 et 1708. Pendant qu'on était occupé à faire ces dénombrements, le sacristain de la chapelle ,,Nieuwe-Zijds'' est décédé, mais un autre monsieur m'a fait parvenir les nombres relatifs aux années 1701, 1702 et 1703. Pendant ces trois années 264 garçons et 251 filles y ont été baptisés.

Il est raisonnable de penser qu'après une mortalité extraordinaire un plus petit nombre d'enfants naissent et sont baptisés l'année suivante, et c'est ce que l'expérience confirme. En 1727 le nombre des décès a été fort grand, savoir 13775. Voici les nombres des baptêmes qui ont eu lieu dans quelques églises réformées et luthériennes, pendant l'année précédente et l'année suivante.

	En 1726	En 1728
Eglise du nord	655	457
,, ,, sud	497	357
Vieille église	448	365
Eglise de l'Amstel	216	185
,, ,, l'île	18	28
Chapelle ,,Oude-Zijds''	7	3
Chez les luthériens	1126	947
	2967	2342

Je ne possède pas les nombres des enfants baptisés en ces deux années dans les autres églises. On voit aisément qu'en 1728 le nombre des baptêmes enrégistrés a été inférieur de $\frac{5}{24}$ au nombre correspondant pour l'année 1726.

Il apparaît que vers 1700 le nombre des enfants baptisés dans les églises réformées était plus grand qu'à présent. Les nombres de ceux qui ont été baptisés en 1700 dans l'église de l'ouest,

dans l'église de l'est et dans la chapelle „Nieuwe-Zijds" me font défaut; c'est pourqoui je leur substituerai les nombres correspondants pour l'année 1701, ce qui probablement ne fera pas grande différence

	En 1700	En 1739
Eglise du nord	902	500
Nouvelle église	895	905
Eglise du sud	596	526
Vieille église	463	441
Eglise de l'Amstel	212	257
„ „ l'île	47	45
Chapelle „Oude-zijds"	31	6
Eglise de l'est	95	117
Chapelle „Nieuwe-zijds"	179	108
Eglise de l'ouest	876	771
	4296	3676

Mais comme cette statistique ne se rapporte qu'à une seule année et que même pour cette année elle ne mérite par confiance, attendu qu'il peut y avoir eu une grande différence entre les nombres des baptêmes de 1700 et de 1701, je comparerai maintenant les nombres des enfants baptisés en 1701, en 1702 et en 1703 dans toutes les églises réformées d'Amsterdam avec les nombres correspondants pour les années 1736, 1737 et 1739. Ce n'est pas à dessein que je passe l'année 1738: on voit par ce qui précède que les nombres de cette année me manquent pour l'église de l'ouest, pour l'église de l'est et pour la chapelle „Nieuwe-Zijds". La somme des nombres des baptêmes qui ont eu lieu en 1738 dans sept autres églises est inférieure de 134 à la somme correspondante pour l'année 1736, de 81 à la même somme pour l'année 1737, de 74 à celle pour l'année 1739. Probablement le nombre des baptêmes qui ont eu lieu en 1738 est-il donc encore plus petit que le nombre correspondant pour l'année 1736, 1737 ou 1739.

Année....	1701	1702	1703	Somme	1736	1537	1739	Somme	1751	1752
Vieille église.............	452	483	432	1367	439	437	441	1317	303	336
Nouvelle église...........	867	773	741	2381	891	915	905	2711	686	733
Eglise de l'est............	95	103	105	303	107	102	117	326	75	83
,, ,, l'ouest..........	876	862	856	2594	750	790	771	2311	594	659
,, du sud............	635	538	529	1702	515	473	526	1514	428	410
,, ,, nord............	983	883	770	2636	652	576	500	1728	406	332
Chapelle „Oude-Zijds"......	35	28	27	90	14	18	6	38	11	11
,, „Nieuwe-Zijds"....	179	165	171	515	91	105	108	304	80	97
Eglise de l'Amstel.........	252	256	313	821	221	222	257	700	190	230
,, ,, l'île............	46	65	60	171	8	46	45	99	30	36
Chez les Wallons..........	279	267	265	811	168	148	144	460	94	98
Dans les églises anglaises...									3	14
	4699	4423	4269	13391	3856	3832	3820	11503	2900	3039

En 1701, en 1702 et en 1703 on a baptisé annuellement environ 4500 enfants en moyenne; en 1736, en 1737 et en 1739 ce nombre moyen a été de 3836, mais en 1751 et 1752 le nombre moyen des baptêmes a été inférieur à 3000. En 1750, 645 enfants ont été baptisés dans la nouvelle église.

Dans les années auxquelles se rapporte le tableau suivant les pasteurs luthériens ont baptisé les nombres suivants d'enfants (outre les personnes adultes baptisées par eux).

Année	Enfants	Année	Enfants	Année	Enfants
1701	1210	1736	1487	1746	1268
1702	1198	1737	1449	1747	1322
1703	1097	1738	1550	1748	1173
		1739	1528	1749	1250
		1740	1471	1750	1196
	3505		7485		6209
3		5		5	
Nombre annuel	1168	Nombre annuel	1497	Nombre annuel	1242

En 1751 le nombre des baptêmes a été de 1209 chez les luthériens; en 1752 ce nombre était de 1216 enfants et de 2 adultes.

Pendant 22 années (1718—1739) les pasteurs luthériens ont baptisé 26503 enfants et 41 adultes, annuellement donc en moyenne à-peu-près 1205 enfants et 3 adultes. De 1740 à 1750 inclusivement ils ont encore baptisé 14721 enfants et 15 adultes. Pendant 33 années ils ont donc baptisé 41227 enfants, ce qui fait annuellement 1249 en moyenne.

Parmi les remonstrants et les anabaptistes le nombre des bap-

têmes a diminué considérablement depuis 1701, comme on le voit par le tableau suivant. Plusieurs autres petites communautés ont à-peu-près disparu. Pendant les années auxquelles se rapporte le tableau, les nombres des personnes baptisées par les pasteurs remonstrants ont été les suivants.

Année	Baptêmes	Année	Baptêmes
1701	39	1736	29
1702	57	1737	24
1703	36	1739	29
	132		82
3		3	
Nombre annuel	44	Nombre annuel	27

Chez les anabaptistes flamands et waterlanders réunis les nouveaux membres, c.à.d. les adultes qu'on a baptisés ont été au nombre de 70 en 1701, au nombre de 69 en 1702 et de 75 en 1703; cela fait 71 par an en moyenne. La moyenne annuelle n'est que de 44 pour les années 1736, 1737 et 1739. Pendant 6 années (1734—1739) le nombre annuel moyen des baptêmes a été de 51, et pendant les six années 1710—1715 de 59.

Un membre du consistoire réformé m'a communiqué à ma demande les nombres exacts, tirés des livres des églises, de ceux qui ont fait dans les années auxquelles se rapporte le tableau suivant, leur profession de foi devant les pasteurs réformés d'Amsterdam. Dans ces nombres ne sont pas compris ceux qui sont devenus membres par attestations.

Année	Nouveaux membres	Année	Nouveaux membres
1701	1493	1737	1307
1702	1404	1738	1437
1703	1339	1739	1184
	4236		3928

Ceci nous porte à croire que la population d'Amsterdam diminue plutôt qu'elle n'augmente. D'autres considérations nous conduisent à la même conclusion, par exemple la suivante.

Nombre des maisons à Amsterdam qui n'avaient pas trouvé de locataires après le mois de Mai.

On avait beaucoup de peine il y a quelques années à acheter ou à louer une maison dans cette ville pour un prix raisonnable,

et dans les mois de Mai et de Juin on ne voyait guère de maisons à louer. 1) Mais depuis peu de temps les circonstances ont bien changé; beaucoup de familles ont quitté le domaine de la ville et sont parties pour d'autres provinces, et l'on voit qu'à-présent un grand nombre de maisons ne trouvent pas de locataires; les prix des maisons et les loyers ont baissé considérablement par conséquence. On ne donnait que des évaluations grossières du nombre des maisons à louer dans l'été de 1741: l'un estimait que c'était un petit, l'autre que c'était un fort grand nombre. C'est pourquoi je me suis efforcé à parvenir à une connaissance plus exacte de ce nombre, pour qu'on puisse voir quels changements il a subi depuis.

Chaque année, au mois de Mai, quelques officiers supérieurs de la garde civique, les prévôts, les domestiques du tribunal militaire et d'autres personnes font le tour chacun de son quartier pour inscrire dans le régistre de la garde civique les hommes capables de porter les armes qui viennent de se fixer dans la ville. De cette façon le gouvernement de la ville a constaté qu'au mois de Mai de l'année 1740, 410 maisons n'avaient pas de locataires; et que le nombre correspondant était de 790 pour l'année 1741 et et de 889 pour l'année 1743. Mais comme les officiers de la garde civique n'entrent pas dans la plupart des ruelles étroites et des impasses, d'où les chefs des pompiers recrutent leurs gens, il s'ensuit que ces nombres ne sont pas exacts. En 1741 j'ai parcouru une grande partie de la ville à l'heure que j'avais l'habitude d'employer pour faire une promenade, et j'ai noté secrètement les nombres des maisons, des appartements et des caves qui alors étaient encore à louer, ainsi que celui des maisons inhabitables. J'ai compté parmi les maisons les habitations souterraines et les maisons de derrière, mais celles-ci étaient peu nombreuses. Je n'ai pas tenu compte des magasins, greniers ou caves, ni des écuries à louer; toutefois j'ai fait une exception pour les caves destinées à être habitées. J'ai commencé mes tournées le 12 Juin 1741 et je les ai terminées le 26 de ce mois; cependant j'ai fait encore le 1 Juillet la statistique de deux quartiers près de la „Goudbloms-graft". Quant au quartier des Juifs, et aux rues entre la „Oude Schans" et la

1) C'est la coutume dans cette ville que les propriétaires mettent à louer leurs maisons quelques jours avant la fête de Noël ou au jour de Noël lui-même; ces maisons doivent être louées avant le mois de Mai, sinon elles restent le plus souvent sans locataires.

,,Geldersche Kaay", une de mes connaissances en a fait une statistique exacte; tandisqu'un autre a fait la même chose pour plusieurs groupes de maisons entre la ,,Lijnbaans-" ou ,,Baan-graft" et la ,,Prince-graft". Je pourrais montrer séparément les résultats obtenus pour les différents quartiers et les différentes îles dont la ville se compose; mais pour ne pas être trop long je n'indiquerai ces résultats que pour 16 quartiers. Ces quartiers sont compris entre la ,,Prince-graft", le ,,Binnen-Amstel", la ,,Lijnbaans-graft" ou les ,,Stads-Vesten" et la ,,Brouwers-graft"; toutes les rues et tous les carrefours compris entre ces quais en font partie. Dans ces quartiers 369 maisons, 255 appartements et 12 caves étaient à louer; il y avait en outre 14 maisons inhabitables à cause des renouvellements qu'on y faisait. Dans toute la ville 1022 maisons, 735 appartements et 40 caves étaient à louer; il y avait en outre 75 maisons inhabitables pour la raison que nous venons d'indiquer. — En 1744 le nombre total des maisons inhabitées était de 792 au mois de Mai; parmi ce nombre sont compris, à ce qu'on disait, les maisons donnant sur les ruelles étroites et sur les impasses. Au mois d'Octobre de l'année 1709 quelqu'un a tiré des livres de l'hôtel de ville le nombre des maisons et autres édifices de la ville qui étaient inscrites aux régistres officiels; les cinq livres en question donnaient un nombre total de 23064 maisons.

Le nombre des maisons et des édifices à Amsterdam était de 26035 d'après le régistre de l'année 1722. En prenant la moyenne du siècle qui précède cette dernière année, on trouve que le nombre des maisons et des édifices a augmenté environ de cent par an; mais à partir de 1732 l'augmentation a été moindre. Les nombres des maisons nouvelles (abstraction faite des maisons renouvelées et améliorées ainsi que des maisons construites en 1741 et en 1742 qui n'avaient pas encore été taxées) étaient les suivants d'après les livres officiels.

En 1733 et 1734	12
1735	40
1736	115
1737	39
1738, 1739 et 1740	76

Donc en huit années (1733—1740), 282 maisons.

Cela fait 41 par an en moyenne pendant les 5 premières années, mais moins de 25 par an pendant les trois dernières années (1738—1740).

Du nombre des orphelins à Amsterdam.

Dans la deuxième édition de la „Description d'Amsterdam" par COMMELIN (1694) il est dit qu'en 1690 pas moins de 1000 enfants se trouvaient dans l'orphelinat de la ville 1), 1000 aussi dans l'orphelinat du diaconat 2), 1300 ou 1400 dans la maison des aumôniers et dans les familles ou ceux-ci les avaient placés 3). Le nombre total de ces enfants est donc de 3300 à 3400. Mais je ne suis pas certain que ce nombre n'a pas été obtenu par une évaluation grossière, attendu qu'actuellement on trouve dans l'orphelinat de la ville ainsi que dans celui du diaconat la moitié à peine de ce nombre d'enfants, et que l'auteur dit dans sa préface que les régents de l'orphelinat de la ville n'ont voulu lui montrer aucun des anciens documents se trouvant dans l'orphelinat: probablement le nombre des enfants ne lui a-t-il donc pas été communiqué non plus.

J'ai adressé à tous les orphelinats la demande de me faire connaître séparément les nombres des garçons et des filles qui s'y trouvaient; mais je n'ai pas obtenu toutes les réponses simultanément. Je n'ai pas jugé nécessaire de corriger les petits écarts qui peuvent donc s'y trouver, parce que les deux principales raisons que j'avais de demander ces nombres, sont les suivantes. D'abord, je voulais savoir quel est le sexe de la majorité des enfants, et ensuite, je désirais donner une statistique qui permît de voir plus tard si dans chaque orphelinat considéré à-part le nombre des enfants a augmenté ou diminué. Voici les nombres qu'on m'a communiqués:

1) Deuxième Partie, p. 565.
2) Même Partie, p. 594.
3) p. 591.

	Garçons	Filles	Somme
Dans l'orphelinat de la ville (Décembre 1740)	222	214	436
,, ,, du diaconat ,, 1740)	252	276	528
,, ,, des aumôniers (le 1ier Janvier 1741)	549	654	1203
,, ,, des Wallons (Déc. 1740)	28	35	63
,, ,, luthérien (le 1ier Février 1741	84	79	163
,, les orphelinats catholiques (Févr. 1741)	165	225	390
,, l'orphelinat des mennonites, Prinsengraft (Févr. 1741)	15	15	30
,, ,, des collégiens (Févr. 1741)	18	18	36
,, ,, anglais (Mars 1741).....	0	0	0
	1333	1507	2849

L'orphelinat de la ville reçoit, d'après les règlements actuels, les filles jusqu'à l'âge de 12 ans et les garçons jusqu'à l'âge de 14 ans. Les filles quittent en général cet orphelinat lorsqu'elles atteignent l'âge de 20 ans, et les garçons à l'âge de 23, de 24 ou de 25 ans, lorsqu'ils connaissent leur métier. Voilà probablement la raison pour laquelle le nombre des garçons est si grand en comparaison avec celui des filles. On a compté parmi les 436 enfants habitant cette maison, 1 garçon et 2 filles qui avaient été placés ailleurs. Quant aux 528 enfants de l'orphelinat du diaconat, ils habitaient tous l'orphelinat lui-même. Parmi les enfants de l'orphelinat des aumôniers il y avait 76 enfants en-dessous de 4 ans qui étaient placés ailleurs, savoir 43 garçons et 33 filles. Il y avait dans cet orphelinat 252 enfants, savoir 115 garçons et 137 filles, de 4 à 10 ans. Le nombre des garçons plus âgés y était de 391 et le nombre correspondant des jeunes filles de 484; ce qui fait 1203 enfants en tout. Attendu que dans cet orphelinat on reçoit aussi les enfants dont les parents ont été luthériens ou catholiques, ainsi que les enfants-trouvés, et que chaque orphelinat a un règlement à lui, il s'ensuit qu'on ne peut pas calculer d'après le nombre des orphelins les rapports des adhérents des divers cultes. — J'ai reçu plus tard une nouvelle statistique de l'orphelinat des aumôniers; je la donnerai un peu plus loin.

A cause de cette incertitude dans les données de COMMELIN, j'ai tâché d'apprendre à connaître le nombre des enfants qui

habitaient l'orphelinat de la ville en 1690; mais ayant pu consulter les livres j'ai trouvé que les nombres relatifs aux années anciennes n'avaient pas été indiqués et qu'on s'était contenté de noter les enfants qui entraient dans la maison ou qui en sortaient ou qui mouraient. Depuis 1695 jusqu'à 1730 inclusivement, c.à.d. pendant 36 ans, 1412 enfants sont entrés dans l'orphelinat et 1596 enfants l'ont quitté; ces derniers se composaient de 371 garçons et de 696 filles sortis de l'orphelinat, de 180 garçons devenus matelots, de 9 enfants (garçons et filles) qu'on a mis à la porte, de 35 qui se sont enfuis, et de 305 qui sont morts. Si l'on ne tient pas compte de ceux qu'on a mis à la porte ni de ceux qui se sont enfuis, 551 garçons et 696 filles en tout sont sortis de l'orphelinat. La cinquième partie environ de ceux qui sont entrés dans l'orphelinat sont morts et une troisième partie environ des garçons sortis de l'orphelinat sont allés à la mer. J'ai trouvé qu'au mois de Mai de l'année 1724 il y avait 428 enfants dans l'orphelinat; en y ajoutant les 1327 enfants qui avaient quitté la maison de 1695 à 1724, on voit que le nombre total est de 1755. Si l'on en retranche les 1233 enfants qui y sont entrés pendant ce temps, on trouve qu'au mois de Mai de l'année 1695 il y avait encore 522 enfants. Depuis le commencement de l'année 1695 jusqu'à la fin de l'année 1730, 44 enfants en moyenne ont quitté l'orphelinat chaque année; ce nombre est de 46 pour les années 1695—1701. Je conserverai ce nombre et j'admettrai qu'en 5 ans (1690—1694) le nombre total des enfants habitant l'orphelinat a diminué de 230. Pendant ce même temps 253 enfants y sont entrés. Il s'ensuit qu'en 1690 le nombre des enfants habitant l'orphelinat doit avoir été inférieur de 23 au nombre correspondant pour l'année 1695. Par conséquent en 1690 le nombre des enfants habitant cet orphelinat était de 499, chiffre inférieur de 50 % à celui indiqué par COMMELIN.

Depuis quelque temps on a fait des statistiques plus exactes. Dans les années suivantes il y a eu après le 2 Mai dans l'orphelinat de la ville les nombres d'enfants que voici.

Année	Enfants	Année	Enfants	Année	Enfants
1734	367	1738	373	1743	453
1735	361	1739	381	1744	444
1736	373	1740	408	1745	452
1737	363	1741	434		

L'année 1742 manque. La statistique détaillée de la dernière année est la suivante.

Le premier Mai de l'année 1744 le nombre des enfants était de 444. En une année 33 enfants sont morts. Reste 411. Pendant ce temps 56 enfants y sont entrés. 411 + 56 = 467. Le 2 Mai de l'année 1745, 15 enfants sont sortis de l'orphelinat. Il en restait donc 452.

Depuis l'année 1672 jusqu'à l'année 1744 inclusivement, 3509 enfants sont entrés dans cet orphelinat; cela fait en moyenne 48 par an.

Avant 1737 les parents des enfants qui entraient dans l'orphelinat de la ville, devaient avoir habité la ville durant 7 ans; mais pour décharger l'orphelinat du diaconat, on y accepte maintenant tous les enfants dont les parents sont membres de l'église réformée et ont habité la ville pendant 4 ans seulement.

On a trouvé que les nombres suivants d'enfants ont habité l'orphelinat des aumôniers pendant les années indiquées dans le tableau. Tous les chiffres se rapportent au premier jour de l'année.

	Garçons.				Filles.			
Année	Dans la maison principale	Dans la maison des enfants	Dans les familles	Somme	Dans la maison principale	Dans la maison des enfants	Dans les familles	Somme
1731	435	103	15	553	507	95	28	630
1732	422	88	19	529	499	104	27	630
1733	413	87	25	525	513	87	29	629
1734	419	84	26	529	531	85	27	643
1735	425	88	20	533	519	93	14	626
1736	394	84	29	507	484	94	19	597
1737	392	79	26	497	466	96	18	580
1738	378	100	31	509	485	105	31	621
1739	383	114	34	531	484	107	34	625
1740	380	101	35	516	465	111	28	604
1741	391	115	43	549	484	137	33	654
1742	420	144	41	605	536	150	43	729
	4852	1187	344	6383	5973	1264	331	7568

Je donnerai maintenant une statistique des enfants qui habitaient l'orphelinat dans les années indiquées dans le tableau. La dernière colonne indique le chiffre des enfants qui se trouvaient dans la maison le dernier jour de l'année correspondante donnée par la première colonne.

Année	Enfants qui entrent	Enfants trouvés	Enfants délaissés	Au-dessus de l'âge indiqué	Nombre total des enfants qui entrent	Nombre des enfants habitant la maison
1726	99	25	17	8	149	1168
1727	159	26	17	4	206	1136
1728	193	14	34	16	257	1229
1729	118	17	20	12	167	1201
1730	118	24	8	6	156	1183
1731	104	21	12	8	145	1159
1732	100	19	6	8	133	1154
1733	128	15	8	9	160	1172
1734	80	11	13	9	113	1159
1735	71	20	6	5	102	1104
1736	81	17	10	8	116	1077
1737	142	26	13	15	196	1130
1738	112	21	12	15	160	1156
1739	94	7	11	10	122	1120
1740	173	26	16	15	230	1203
1741	204	30	42	18	294	1334

Le tableau ci-dessous indique combien d'enfants ont quitté la maison pendant ces mêmes années. Le chiffre de ceux qui se sont enfuis en 1722, en 1723, en 1725 et en 1726 est de 32. En 1728 on a dans l'écrit qu'on m'a donné retranché 28 du nombre total des enfants: on en avait compté 28 de trop. C'est pourquoi je me contente de prendre 4 pour le nombre de ceux qui se sont enfuis en 1726. Le nombre des enfants, en 1726 et en 1727, doit donc avoir été supérieur de 28 au nombre donné ici, mais pour les années suivantes cette différence n'existe pas.

Année	Sortis	Morts	A la mer	Mis à la porte	Enfuis	Somme
1726	67	64	20	9	4	164
1727	72	134	25	7	0	238
1728	51	121	12	8	0	192
1729	66	87	32	8	2	195
1730	66	69	32	2	5	174
1731	60	81	19	6	3 (2 garçons et 1 fille)	169
1732	50	45	29	11	3	138
1733	44	64	26	4	4 (3 ,, ,, 1 ,,)	142
1734	58	43	16	7	2	126
1735	76	42	29	2	8 (7 ,, ,, 1 ,,)	157
1736	57	54	24	4	4	143
1737	36	62	33	8	4	143
1738	52	46	21	4	11	134
1739	57	57	14	22	8 (5 ,, ,, 3 ,,)	158
1740	53	55	20	15	4	147
1741	30	77	26	23	7	163
	895	1101	378	140	69	2583

Le 31 Décembre de l'année 1725 le nombre d'enfants habitant cet orphelinat était de 1211.

Les mariages à Amsterdam.

Autorisé par Messieurs les commissaires des affaires matrimoniales, j'ai fait tirer des livres de l'hôtel de ville les extraits suivants. D'abord, une liste des nombres de couples dont le mariage a été annoncé pendant 90 années consécutives. Pour ne pas être trop long je me contenterai de donner les sommes des nombres relatifs à 10 années, du moins pour les 80 premières années. Les mariages de ceux qui se disent membres de l'église réformée sont annoncés dans les églises publiques, les autres à l'hôtel de ville

Années	Dans les églises	A l'hôtel de ville	Somme
1650—1659	18023	3760	21783
1660—1669	20785	4050	24835
1670—1679	17397	3383	20780
1680—1689	18500	6080	24580
1690—1699	17116	6236	23352
1700—1709	17262	6141	23403
1710—1719	15985	6151	22136
1720—1729	17717	7570	25287
	142785	43371	186156 couples.

Je donnerai les nombres suivants pour chaque année séparément. Les années dont il est question dans le tableau précédent, ainsi que les 12 années du tableau suivant et les 10 années pour lesquelles je donnerai les nombres des mariages qui ont eu lieu à Amsterdam, commencent toutes le premier jour de Janvier et finissent le dernier jour de Décembre.

Année	Dans les églises	A l'hôtel de ville	Somme
1730	1959	897	2856
1731	1894	890	2784
1732	1832	875	2707
1733	1766	871	2637
1734	1606	891	2497
1735	1729	957	2686
1736	1592	910	2502
1737	1552	947	2499
1738	1618	996	2614
1739	1633	928	2561
1740	1512	865	2377
1741	1368	978	2166
	20061	10825	30886 couples.

Cela fait en moyenne, pendant les 12 dernières années, 2574 couples par an. La somme des nombres de tous les couples est de 217042 pour les 92 années considérées; mais il ne faut pas croire que tous ces couples se soient mariés dans la ville. Voici les nombres des couples qui pendant les dernières dix années se sont fait marier à Amsterdam; ces nombres sont tirés des livres de l'hôtel de ville et de ceux des églises réformées. En 1742 le

mariage de 2288 couples a été annoncé; en 1743 le nombre correspondant était de 2233 couples.

Année	A l'hôtel de ville	Dans la nouvelle église	Dans la vieille église	Dans l'église wallonne	Dans l'église anglaise
1732	764	1325	284	32	2
1733	736	1263	290	33	3
1734	756	1138	250	40	6
1735	819	1251	283	37	2
1736	784	1187	235	43	4
1737	793	1126	225	25	1
1738	825	1178	265	38	4
1739	743	1169	274	37	3
1740	714	1117	208	35	4
1741	656	1032	163	14	6
	7590	11786	2477	334	35

Cela fait en tout 22222 couples pour les dix années considérées, ou 2222 couples par an en moyenne. Outre ceux-ci un petit nombre de mariages ont été conclus à Amsterdam dans l'église épiscopale anglaise, à l'Agterburgwal. Dans les villages situés près de cette ville, tels que Buiksloot, Nieuwendam, Slooterdijk, Amstelveen, etc., il se marie aussi chaque année quelques couples dont le mariage a été annoncé à Amsterdam. A Nieuwendam ce nombre a été de 2 couples en moyenne pendant 10 années.

Voici les nombres des mariages qui ont été inscrits à Amsterdam du premier Avril au dernier Mars de l'année suivante; cette liste (qui doit être envoyée à la Haye tous les six mois pour y être contrôlée) est tirée du livre des impôts sur le mariage.

Année	Couples	Année	Couples
1729	2870	1732	2674
1730	2818	1733	2624
1731	2768	1734	2576

Le mariage de tous ces couples a été inscrit à Amsterdam, tant de ceux dont l'époux et l'épouse demeuraient à Amsterdam, que de ceux dont l'époux ou l'épouse demeurait à Amsterdam et l'autre ailleurs; en effet, suivant le huitième article du règlement des mariages chaque époux (ou épouse) doit payer la moitié de l'impôt dans l'endroit ou il demeure. Mais ces dernier mariages

ne sont pas nombreux; on le voit par les chiffres relatifs à chacune des années suivantes séparément.

Année	Nombre des couples qui ont payé l'impôt entier et nombre de ceux qui ont été admis pro Deo.	Nombre des couples qui ont payé la moitié.
1735	2535	73
1736	2349	78
1737	2484	53
1738	2544	50

Dans la première colonne sont compris un petit nombre de couples, mariés pro Deo, dont l'époux ou l'épouse demeurait en-dehors de la ville. Dans le régistre ces couples ne sont pas indiqués séparément, mais il a été établi qu'ils sont peu nombreux. Si l'on n'en tient pas compte, on trouve 64 pour le nombre moyen des couples qui se sont mariés pendant ces 4 ans et dont l'un des deux époux demeurait dans la ville et l'autre en-dehors du territoire soumis à sa jurisdiction. La moitié environ de ces couples s'établissent à Amsterdam.

Les tableaux précédents font voir qu'un grand nombre des couples considérés se marient en-dehors de la ville. Cela résulte aussi de ce qu'en l'année 1738 seule 76 des couples dont le mariage avait été annoncé à l'hôtel de ville se sont mariés ailleurs, savoir 49 couples dont l'époux et l'épouse demeuraient à la ville et 27 couples dont l'un des deux époux demeurait ailleurs.

J'ai tiré des régistres l'âge de toutes les demoiselles qui en 1739 avaient l'intention d'épouser des célibataires, du moins de toutes celles qui se sont présentées aux commissaires. Chaque demoiselle doit indiquer son âge; quant à l'âge des veuves on ne le demande pas. Les nombres ont été soigneusement tirés des livres conservés à l'hôtel de ville, savoir du livre de ceux dont le mariage a été annoncé dans les églises et du livre de ceux dont le mariage a été annoncé à l'hôtel de ville. Voici ces nombres.

D'après le livre des églises.

Nombre	Age		Nombre	Age		Nombre	Age	
5	17	ans et en-dessous	75	26		24	35	
17	18		70	27		26	36	
32	19		98	28		10	37	
51	20		52	29		13	38	
41	21	ans	71	30	ans	10	39	ans
73	22		19	31		8	40	
83	23		45	32		3	42	
115	24		30	33		3	44	
85	25		30	34		8	45	ans et au-dessus
502	demoiselles		490	demoiselles		105	demoiselles	

En prenant la moyenne de tous les nombres, on trouve que l'âge moyen des demoiselles qui avaient l'intention d'épouser des célibataires est de 27 ans à-peu-près, d'après le livre des églises.

D'après le livre de l'hôtel de ville.

Nombre	Age		Nombre	Age		Nombre	Age	
4	17	ans et en-dessous	56	26		9	35	
11	18		42	27		10	36	
14	19		44	28		5	37	
33	20		32	29		7	38	ans
21	21	ans	46	30	ans	6	39	
51	22		13	31		5	40	
40	23		20	32		1	43	
59	24		8	33		2	44	ans et au-dessus
50	25		12	34				
283	demoiselles		273	demoiselles		45	demoiselles	

L'âge moyen des demoiselles qui avaient l'intention d'épouser des célibataires est de $26\frac{1}{2}$ ans à-peu-près d'après le livre de l'hôtel de ville. L'âge moyen d'après les deux livres est de $26\frac{3}{4}$ ans à-peu-près.

J'ai fait noter en outre l'âge des demoiselles qui dans la même année avaient l'intention d'épouser des veufs ; voici leurs nombres.

D'après le livre des églises.

Nombre	Age	Nombre	Age	Nombre	Age
1	19	9	28	4	37
4	20	4	29	6	38
2	21	9	30	5	39
6	22	5	31	10	40
6	23 ans	12	32 ans	2	41 ans
9	24	13	33	3	42
9	25	10	34	1	43
7	26	11	35	4	44
9	27	8	36	12	45 ans et au-dessus
53 demoiselles		81 demoiselles		47 demoiselles	

L'âge des demoiselles qui avaient l'intention d'épouser des veufs, est de $32\frac{1}{4}$ ans en moyenne d'après ce dernier livre.

D'après le livre de l'hôtel de ville.

Nombre	Age	Nombre	Age	Nombre	Age
2	17	4	28	2	37
1	20	7	29	2	38
7	22	6	30	3	40
4	23	9	32	1	41 ans
10	24 ans	3	33 ans	2	42
3	25	9	34	3	43
11	26	4	35	1	44
4	27	3	36	4	45 ans et au-dessus
42 demoiselles		45 demoiselles		18 demoiselles	

L'âge moyen des demoiselles qui avaient l'intention d'épouser des veufs est de $30\frac{3}{5}$ ans environ d'après ce livre. — L'âge moyen d'après les deux livres est de $31\frac{9}{16}$ ans. — Le nombre total des demoiselles qui se sont mariées en 1739 est à celui des demoiselles âgées de 22 à 28 ans comprises dans ce nombre environ comme 9 est à 4.

En général le nombre des demoiselles qui se marient à un âge supérieur à 26 ans et à-peu-près égal au nombre de celles qui se marient à un âge plus bas. Mais si l'on ne tient compte que des

demoiselles qui épousent des célibataires il faut lire $25\frac{1}{2}$ au lieu de 26.

Ceux qui se sont présentés aux commissaires se divisent dans les catégories suivantes.

	D'après le livre des églises		D'après le livre de l'hôtel de ville		Somme
Célibataires et demoiselles	1097	couples	601	couples	1698
Veufs et demoiselles.....	181		105		286
Célibataires et veuves....	195		78		273
Veufs et veuves.........	121		35		156
	1594		819		2413

Le nombre des demoiselles qui épousent des jeunes gens est à celui des demoiselles qui épousent des veufs comme 6 est à 1, d'après chacun des deux livres.

Le nombre des demoiselles qui se mariaient était au nombre correspondant des veuves comme 4 est à 1 d'après le livre des églises; mais comme 25 est à 4, d'après le livre de l'hôtel de ville; ce qui fait une grande différence.

Dans un ouvrage qui comprendra quelques volumes in Folio, appelé l'Encyclopédie, c.à.d. dictionnaire général de toutes sortes de sujets, dont le premier volume a paru à Paris en 1751, je trouve p. 912 au mot Azmer, Ville des Indes dans les états du Mogol, la phrase suivante: „On dit qu'à l'extrémité de cette province les filles se marient à huit ou neuf ans, et ont des enfants à dix." J'ai demandé ce qu'il fallait penser de cette affirmation à un monsieur qui a longtemps séjourné dans ce pays: il m'a répondu qu'il est vrai que parmi les Jentives dans les familles nobles les enfants se marient quelquefois à l'âge de 8 ou de 9 ans, mais qu'ils ne demeurent pas encore ensemble immédiatement après cette cérémonie: le véritable mariage et la cohabitation n'ont lieu que lorsque les parents jugent qu'ils ont atteint l'âge nécessaire. Ce monsieur ne savait pas que les femmes y ont des enfants à un si bas âge, quoiqu'il soit vrai qu'on s'y marie en général plus tôt que dans ces pays-ci. — En 1670, le 18 Juin, ANNA HINLOPEN s'est mariée à Cassamohasar à l'âge de 13 ans et elle eut un fils moins d'un an après 1).

---

1) Voyage de N. DE GRAAF aux Indes orientales, p. 90. Hoorn. 1701.

Nombre des Juifs à Amsterdam.

Pour apprendre à connaître, fût-ce peu exactement, le nombre des familles juives, j'ai compté au mois d'Octobre de l'année 1742, le nombre des maisons, des habitations souterraines, des appartements et des caves habités par des Juifs dans le quartier des Juifs. J'ai admis qu'une famille habite chaque localité et je n'ai pas tenu compte des demeures inhabitées. Je ne suis pas entré dans les impasses fort étroites et je me suis contenté d'admettre qu'une seule famille y habitait, excepté au cas où je voyais à l'entrée de l'impasse qu'il y en avait plusieurs. Je n'ai pu voir les habitants de bien des maisons et de bien des appartements, de sorte que je ne sais pas si ce sont des Chrétiens ou des Juifs, mais pour ne pas prendre le nombre de ces derniers trop petit je fais l'hypothèse la plus probable, savoir que ce sont des Juifs. De cette façon j'ai trouvé en considérant toutes les parties de la ville où il y a un nombre considérable de Juifs, un nombre total de 2113 familles; mais il doit y en avoir un plus grand nombre à cause de ceux qui habitent des appartements de derrière ou d'autres appartements n'ayant ni porte ni escalier donnant sur la rue, et à cause de ceux qui habitent les impasses et que je n'ai pas compris dans mon évaluation. D'après le nombre des appartements de devant on peut plus ou moins évaluer celui des appartements de derrière: il me semble donc que le nombre des familles juives en cette année doit avoir été de 2500 environ 1). Parmi les Juifs portuguais il y a eu annuellement, vers l'année 1742, 130 décès en moyenne. Nous avons vu plus haut que parmi 100 personnes qui meurent à Amsterdam il y a 6 Juifs; le nombre de tous les Juifs ne doit donc pas beaucoup différer de 12000. On dit que depuis dix ans beaucoup de Juifs allemands sont venus dans la ville.

Nombres des décès à Amsterdam.

Voici les nombres des décès dans les années indiquées dans le tableau suivant. Ces nombres ont été tirés en partie des livres de

1) Ce résultat est confirmé dans une certaine mesure par le dénombrement de toutes les familles habitant la ville qui a été fait en 1747 et dont je parlerai plus loin. On trouva alors que le nombre des familles était de 41561. En admettant que parmi 100 familles il y a 6 familles juives, je trouve que parmi 41561 familles il y en a 2493 ou 2494.

l'hôtel de ville, en partie aussi des régistres annuels qu'on tient à Amsterdam. L'année commence par le premier Janvier et finit le 31 Décembre [1].

Année	Décès		Année	Décès	Année	Décès		Année	Décès
1700	6374		1710	7661	1720	7820	7819	1730	8912
1701	7408	7308	1711	7247	1721	7632		1731	8383
1702	8969		1712	6814	1722	8421		1732	7332
1703	6666		1713	6922	1723	7119		1733	10691
1704	8053		1714	8108	1724	7622		1734	7764
1705	7364	7362	1715	7633	1725	6748	6787	1735	6533
1706	6000		1716	7078	1726	9255		1736	9206
1707	7040		1717	7451	1727	13775		1737	9291
1708	7289	7299	1718	8644	1728	11164		1738	7762
1709	6529		1719	9726	1729	9618.		1739	7507
	71692			77284		89174			83381

Le nombre total des décès pendant 40 ans a été de 321531. Cela fait 8038 par an en moyenne. Voici les nombres des décès dans les années indiquées dans le tableau suivant:

Année	Décès	Année	Décès	Année	Décès	Année	Décès
1740	10056	1744	7994	1747	8463	1750	8596
1741	9864	1745	8019	1748	9770	1751	6534
1742	7351	1746	6977	1749	9162	1752	6969
1743	7043						

Mais toutes ces personnes n'ont pas été enterrées à Amsterdam. Dans le livre des impôts sur les enterrements ayant eu lieu dans la ville on a noté les nombres des personnes pour l'enterrement desquelles on est venu chercher un acte de consentement: il est défendu d'enterrer un cadavre ou de le transporter hors la ville sans cet acte, excepté les cadavres des juifs qui sont transportés sans acte et qu'on ne trouve donc pas dans le livre des impôts. On n'est pas obligé cependant de prendre un acte pour ceux qui meurent à l'hôpital ordinaire ou à l'hôpital des pestiférés et qui

1 En 1747 et en 1751 on a imprimé une liste des decès qui ont eu lieu à Amsterdam. Cette liste diffère quelque peu, pour les années 1701, 1705, 1708, 1720 et 1725, de la liste donnée dans le texte; mais nous y avons noté les différences. La première liste donne les nombres des décès pendant le temps 1701—1746, la seconde les nombres qui correspondent aux années 1701—1750.

sont enterrés au cimetière des pestiférés près de la porte de Leyde. Si le directeur ou la directrice de l'hôpital y meurt ou quelque autre personne qu'on veut enterrer dans la ville, on doit prendre un acte; mais pour une année entière le nombre de ces actes-là est fort petit de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'en tenir compte. On voit que le livre des impôts ne nous permet pas de déterminer exactement le nombre annuel des décès. Le tableau suivant fait voir qu'un nombre assez considérable de personnes meurent chaque année dans l'hôpital ordinaire et dans celui des pestiférés.

Les nombres des malades et des morts dans ces hôpitaux ont été les suivants pendant huit années. Les „nombres des malades" sont les nombres de ceux qui pendant une année entière sont entrés dans les maisons indiquées dans le tableau.

	Année 1736		Année 1737	
	Malades	Morts	Malades	Morts
Dans la maison des femmes	453	86	774	111
„ „ „ „ soldats	878	146	1256	182
„ „ „ „ pansements (verbandhuis)	335	38	335	58
„ „ petite maison (kleinhuis) ...	187	89	260	109
„ „ maison des pestiférés	207	104	226	108
	2060	463	2851	568
Morts dans la ville		8743		8723
Nombre total des décès ..		9206		9291

	Année 1738		Année 1739	
	Malades	Morts	Malades	Morts
Dans la maison des femmes	507	62	538	86
„ „ „ „ soldats	873	122	920	125
„ „ „ „ pansements	358	47	274	39
„ „ petite maison	233	85	190	65
„ „ maison des pestiférés	210	66	175	68
	2181	382	2097	383
Morts dans la ville		7380		7124
Nombre total des décès ..		7762		7507

	Année 1740		Année 1741	
	Malades	Morts	Malades	Morts
Dans la maison des femmes	752	91	1475	117
,, ,, ,, ,, soldats	1371	172	1568	170
,, ,, ,, ,, pansements....	428	54	407	50
,, ,, petite maison	326	111	396	160
,, ,, maison des pestiférés	284	119	566	170
	3161	547	4412	667
Morts dans la ville		9509		9197
Nombre total des décès ..		10056		9864

	Année 1742		Année 1743	
	Malades	Morts	Malades	Morts
Dans la maison des femmes	416	94	470	66
,, ,, ,, ,, soldats........	842	119	622	94
,, ,, ,, ,, pansements ...	372	35	306	23
,, ,, petite maison	195	62	154	51
,, ,, maison des pestiférés	248	90	226	78
	2073	400	1778	312
Morts dans la ville		6951		6731
Nombre total des décès ..		7351		7043

Pendant les huit années en question 465 personnes en moyenne sont mortes chaque année dans l'hôpital ordinaire et dans celui des pestiférés. Par conséquent contre 121 personnes qui meurent dans la ville il en meurt 7 dans ces deux hôpitaux. Les plus malades sont ceux qui se trouvent dans la petite maison et dans celle des pestiférés. Sur 8 malades qui entrent ces maisons il en meurt en général 3; et dans les 3 autres maisons il en meurt 9 sur 68. En tout 13 personnes en moyenne meurent sur 72 malades qui entrent les deux hôpitaux. Les tableaux précédents montrent aussi que les maladies sont beaucoup plus graves dans une année que dans une autre.

Nombre des familles à Amsterdam.

En 1747, à l'occasion de l'impôt (liberaale gifte) payé en cette année, on a compté exactement le nombre des familles. On en trouve 22821 habitant des maisons, 18740 habitant des maisons de derrière, des appartements et des caves; ce qui fait 41561

familles en tout. Cela ressort d'un écrit imprimé en cette année et auquel on peut se fier.

Ces chiffres permettent de déterminer à peu près le nombre des couples mariés qu'il doit y avoir à Amsterdam. Car le nombre des naissances dépend de celui des couples mariés. Or, j'ai trouvé que dans 36 villages il y avait 1644 naissances par an, contre 7236 couples mariés. Combien de couples mariés y a-t-il donc dans une localité où naissent chaque année 7053 enfants, nombre qui exprime la moyenne des naissances en 1739 et en 1740? Après avoir rétranché $\frac{3}{50}$ des naissances, à cause des enfants naturels, je trouve qu'il doit y avoir dans cette localité 31043 couples mariés. Les enfants naturels sont peu nombreux dans les villages, c'est pourquoi il n'en a pas été fait mention. — Je résoudrai le même problème d'une autre façon encore, savoir en comparant les villages Oost-Zaandam et West-Zaandam avec la ville d'Amsterdam. Dans ces deux villages il y avait 3267 familles, parmi lesquelles 2439 couples mariés; sur 41561 familles, il doit donc y avoir eu 31025 couples mariés. Ce résultat s'accorde à peu de chose près avec le résultat précédent. Dans les villages mentionnés le nombre des veuves est égal à la cinquième partie de celui des couples mariés. Si la même chose est vraie pour la ville d'Amsterdam, le nombre des veuves y serait donc de 6105.

Il me semble probable, d'après tout ce qui précède, que le nombre des habitants d'Amsterdam est à-présent inférieur à 200000.

Evaluation du nombre des habitants de la Hollande.

On pourrait tant bien que mal évaluer le nombre des habitants de toute la Hollande et de la Frise occidentale d'après le nombre des maisons; toutefois les maisons et les édifices des villes ou des villages indiqués dans les régistres officiels ne sont pas tous habités. Dans le régistre imprimé de Geertruidenberg par exemple qui se rapporte à l'année 1732, on trouve mentionnés 456 maisons et édifices, mais parmi ceux-ci beaucoup sont délabrés et inhabités. Il en est de même dans les villages. A de Rijp il y avait, en 1739, 93 magasins, écuries, ateliers et bâtiments où l'on sérance le lin qui étaient inhabités et qui cependant étaient appelés maisons dans le régistre. Voici les nombres des maisons et des

édifices pour quelques localités d'après le régistre de 1732 (d'après celui de 1739 pour de Rijp). J'ai écrit à-côté les nombres des familles qui s'y trouvaient; dans le territoire de Westzaanen on les a comptées en 1736, dans celui d'Oostzaanen et à de Rijp en 1739.

	Maisons et édifices	Familles
Dans le territoire (ban) de Westzaanen	3249 1)	3553
„ „ „ ......d'Oostzaanen	1954 2)	2184
A de Rijp......................	575	546
	5778	6283

Dans ces localités le nombre des familles surpasse d'une onzième partie environ celui des maisons et des édifices indiqués dans le régistre officiel. Il se pourrait que dans d'autres villages cette différence ne fût pas absolument la même; mais je n'examinerai pas cette question pour le moment. D'après le régistre de 1732 on a compté 72351 maisons et édifices dans les villages et à la campegne de Hollande. J'en retranche 112 pour Heenvliet que j'ai compté ici parmi les villes. Il en reste donc 72239, et le nombre des familles, qu'on trouve en augmentant ce dernier nombre d'une onzième partie, est par conséquent de 78806. Le nombre des habitants sera donc de 300000 environ, si l'on admet que 10 familles sont composées de 38 personnes, comme les statitiques le font voir.

Le tableau suivant fait voir que depuis quelque temps le nombre total des décès qui ont eu lieu annuellement dans toutes les villes hollandaises ensemble a été inférieur à 20000 3). Je conserverai toutefois ce nombre rond et je le multiplierai par 25, facteur qui ne me paraît pas trop petit. Il en résulte qu'en 1742 il doit y avoir eu dans l'ensemble des villes hollandaises une population de 500000 personnes à-peu-près. Je trouve donc 800000 habitants à peine pour toute la Hollande 4).

J'ai essayé de parvenir encore d'une autre manière à la connaissance du nombre des habitants des villages et de la campagne

1) „Etat présent de la Hollande", 8ième partie, p. 321, Amsterdam, 1750.

2) Le même livre, p. 246.

3) Ce nombre est égal à $\frac{2}{3}$ environ du nombre annuel des décès à Londres et dans ses faubourgs.

4) Consultez à ce sujet l'ouvrage intitulé „New observations, Natural, Moral etc. in City-, Town- and Country-Bills of Mortality" par THOMAS SHORT, M. D. imprimé à Londres, 1751, p. 243 etc.

de Hollande. J'ai tiré de la Chronique de Medemblik les nombres des maisons et des édifices se trouvant dans les villages mentionnés dans le tableau suivant (toutefois le nombre des maisons du village de Westwoude qui ont été comptées en 1741, ne proviennent pas de cette chronique), et j'ai écrit à côté d'eux les nombres annuels des décès, en prenant la moyenne des nombres relatifs à dix années ou à un plus petit nombre lorsque je ne disposais pas des données relatives à dix ans.

	Maisons et édifices	Décès
Dans le territoire d'Oostzaanen....	1954	401
Schagen......................	401	56
Broek.........................	149	26
Wormer......................	526	92
Warder......................	91	14
Westwoude..................	63	13
Binnewijzend................	32	6
Oosterblokker et Westerblokker....	182	33
Nieuwendam et Zunderdorp.......	184	38
Twisk.........................	129	19
De Helder et Huisduinen.........	590	82
De Rijp......................	586	126
	4887	906

Le nombre des maisons et des édifices qu'on a trouvés en Hollande à la campagne est de 72239. Or, comme 906 personnes meurent annuellement lorsqu'on considère les habitants de 4887 maisons, il s'ensuit que, le nombre des maisons étant de 72239, 13392 personnes doivent mourir chaque année en Hollande dans les villages et à la campagne. En-dehors des villes une personne meurt annuellement sur 6 familles; cela aurait également pu servir à trouver le nombre des décès. En multipliant le nombre trouvé 13392 par $22\frac{2}{7}$ 1) j'obtiens un nombre de 298000 à 299000 personnes; ce chiffre s'accorde assez bien avec le chiffre précédent, car il ne peut être question de trouver le nombre véritable. J'avais autrefois adopté par hypothèse un plus grand nombre pour celui des habitants de la Hollande, mais depuis que j'ai obtenu les statistiques des décès de toutes les villes de cette province j'ai changé d'avis. Cependant, l'ancienne évaluation du nombre des habitants des

1) Voir plus haut à la page 269.

villages et de la campagne s'accorde à-peu-près avec la nouvelle. Pour obtenir un nombre plus exact, il faudra attendre probablement jusqu'à ce qu'on aura fait un véritable recensement.

Nombre des maisons et des édifices des villes hollandaises, d'après les régistres de l'année 1732; et nombres des personnes qui en un certain nombre d'années sont mortes dans ces maisons.

Dans la Hollande méridionale.

	Maisons, etc.		Nombre annuel des décès
1 Dordregt	3954	En cinq années (1735—1739)	631
2 Harlem	7963	,, 7 ,, (1742—1750)	1165
3 Delft	4870	,, 5 ,, (1735—1739)	613 1)
4 Leyde	10891	,, 6 ,, (1734—1739)	1790
5 Amsterdam . . .	26035	,, 10 ,, (1730—1739)	8438
6 Gouda	3974	,, 32 ,, (1701—1732)	601
7 Rotterdam . . .	6621	,, 5 ,, (1735—1739)	1641
8 Gorinchem . . .	1398	,, 10 ,, (1731—1740)	163
9 Schiedam	1504	,, 10 ,, (1732—1741)	215
10 Schoonhoven .	558	,, 10 ,, (1730—1739)	72
11 den Briel	940	,, 9 ,, (1731—1739)	136
12 la Haye	6103	,, 3 ,,(1747,1748,1750)	1380
13 Woerden	397	,, 10 ,, (1732—1741)	110
14 Oudewater . . .	562	,, 10 ,, (1732—1741)	83
15 Geertruidenberg	456	,, 10 ,, (1734—1743)	77
16 Heusden	537	,, 7 ,, (1734—1740)	60
17 Naarden	747	,, 5 ,, (1735—1739)	86
18 Weesp	494	,, 10 ,, (1731—1740)	130
19 Muiden	190	,, 7 ,, (1734—1740)	36
20 Vianen	483	,, 10 ,, (1730—1739)	94
21 Asperen	147	,, 10 ,, (1731—1740)	26
22 Woudrichem . .	158	,, 10 ,, (1734—1743)	11
23 Heukelom	113	moyenne hypothétique	14
24 Goeree	162	En 12 années (1730—1741)	17
25 Vlaardingen . .	691	,, 6 ,, (1735—1740)	131
26 Geervliet	96	,, 11 ,, (1731—1741)	16
27 Heenvliet	112	,, 11 ,, (1731—1741)	15
28 Klundert	120	moyenne hypothétique) 2)	16
Dans la Hollande méridionale . .	80276 maisons.	Nombre total des décès:	17767 par an

1 Dans la ville seulement. En outre il y a eu 71 décès à Delfshaven.

2) La deuxième partie des „Annales néerlandaises" p. 2 fait voir qu'à Klundert il y a eu 117 décès; mais parmi ce nombre sont compris les décès survenus à la campagne.

Dans la Frise occidentale et dans la province du nord (noorder-kwartier).

	Maisons, etc.		Nombre annuel des décès
1 Alkmaar	2581	En 10 années (1730—1739)	470
2 Hoorn	2807	,, 10 ,, (1730—1739)	523
3 Enkhuizen	2605	,, 10 ,, (1728—1737)	412
4 Edam	1141	,, 10 ,, (1731—1740)	182
5 Monnikendam ..	679	,, 5 ,, (1735—1739)	98
6 Medemblik	711	,, 7 ,, (1734—1740)	110
7 Purmerend	630	,, 6 ,, (1735—1740)	126
Dans la Hollande septentrionale	11154	Nombre total des décès:	1921 par an

Pour quelques-unes de ces localités les nombres ont été donnés tels que le secrétariat me les a communiqués, p. e. pour Alkmaar. Parmi ces nombres ne sont pas compris les décès survenus dans l'hôpital ou dans d'autres maisons qui ne communiquent pas leurs statistiques au secrétariat. Mais cela ne peut faire une grande différence pour les petites villes. — Je donnerai maintenant une statistique de Rotterdam relative à 5 années. L'année commence le premier Janvier et finit le dernier Décembre.

Année	Décèsd'après le secrétariat	Décès survenus dans l'hôpital Hommes	Décès survenus dans l'hôpital Femmes	dans l'asile des aliénés	Somme
1735	1463	25	16	3	1507
1736	1451	13	23	2	1489
1737	1792	25	28	9	1854
1738	1697	18	17	11	1743
1739	1552	27	23	11	1613

Parmi les nombres donnés par le secrétariat sont compris ceux des décès survenus dans l'hospice des vieillards, dans l'hospice des vieilles femmes et dans la maison des aumôniers, mais non pas les nombres des décès survenus dans l'hôpital, dans la maison de correction, dans l'asile des pauvres, dans l'orphelinat et dans l'asile des aliénés.

Parmi les décès survenus à Gorinchem sont compris ceux des soldats, mais non pas ceux de l'hôpital. Il en est de même pour ceux de Leeuwarden en Frise. 1)

1) Voyez plus haut, à la page 294.

Si l'on possédait de toutes ces localités des statistiques aussi exactes que celle de Rotterdam ou que celle de Middelbourg en Zélande, cela vaudrait encore mieux. Voici les nombres des décès et des naissances qui ont eu lieu pendant huit ans dans cette dernière ville.

	Année 1734	1735	1736	1737	1738	1739	1740	1741
Gens âgés	921	401	323	491	409	417	403	399
Enfants		469	589	573	618	439	407	557
Enterrés hors la ville			2	7		3		
Dans l'hôpital	33	30	29	29	22	22	20	23
Juifs			11	7		3	6	
Dans l'asile des aliénés	2	2	4	4	2	3	6	6
Dans la prison	2	3	2	1	1	1	1	5
Pendus	1							
Suicidés						1		
	959	905	960	1112	1049	943	843	990

Pendant ces 8 années il y a donc eu à Middelbourg 7761 décès en tout. Pendant ces mêmes 8 années, 4114 garçons et 3784 filles, 7898 enfants en tout, y sont nés. Par conséquent en 8 ans le nombre des naissances a surpassé de 137 celui des décès.

Je trouve qu'en 1752, 758 enfants, savoir 393 garçons et 365 filles, sont nés dans cette ville; parmi eux 36 garçons et 29 filles sont nés morts. On a compté parmi les enfants nés 10 couples de jumeaux, dont 4 étaient composés de 2 garçons et 6 d'un garçon et d'une fille, et encore trois enfants jumeaux, toutes du sexe féminin. Dans cette même année 1099 personnes y sont mortes, parmi lesquelles 440 adultes, 545 enfants, 11 malades de l'hôpital, 2 de l'asile des aliénés. On a transporté et enterré hors la ville 98 cadavres. Il y avait en outre 3 décès parmi les Juifs. Les nombres des décès sont les suivants:

279 en-dessous de 1 an
123 de 1 à 5 ans
182 ,, 5 ,, 10 ,,
33 ,, 10 ,, 15 ,,
34 ,, 15 ,, 20 ,,
45 ,, 20 ,, 25 ,,
27 ,, 25 ,, 30 ,,
47 ,, 30 ,, 35 ,,

68 de 50 à 55 ans
33 ,, 55 ,, 60 ,,
27 ,, 60 ,, 65 ,,
26 ,, 65 ,, 70 ,,
24 ,, 70 ,, 75 ,,
19 ,, 75 ,, 80 ,,
8 ,, 80 ,, 85 ,,
2 ,, 85 ,, 90 ,,

30 de 35 à 40 ans			5 de 90 à 95 ans	
46 ,, 40 ,, 45 ,,			1 ,, 95 ,, 100 ,,	
39 ,, 45 ,, 50 ,,			1 ,, 102 ,,	

Pour faire connaître le nombre des personnes qui habitaient, il y a 128 ans, la province de Hollande et la Frise occidentale, d'après le recensement fait à cette époque, je publierai ici un extrait d'un opuscule intitulé ,,Intérêt de la Hollande", imprimé à Amsterdam en 1662. On y trouve à la dix-huitième page ce qui suit.

,,En 1622 on a accordé le payement d'un impôt personnel, dont étaient seuls exempts les prisonniers, les vagabonds, ceux qui avaient traversé la frontière et les étrangers. A cette occasion on n'a trouvé dans toute la Hollande méridionale que 481934 personnes, quoique l'nstruction des commissaires fût conçue en des termes fort sévères pour rendre toute fraude impossible." On pourrait douter cependant de la sincérité des habitants et par conséquent de l'exactitude de ce nombre; c'est pourquoi je donnerai séparément les nombres des habitants dont il est la somme, tels qu'ils ont été enrégistrés par la chambre des comptes. Voici ces nombres.

	Habitants
Dordregt, avec les villages	40523
Harlem, ,, ,, ,,	69648
Delft, ,, ,, ,,	41744
Leyde et Rijnland	94285
Amsterdam, avec les villages	115022
Gouda, ,, ,, ,,	24662
Rotterdam, ,, ,, ,,	28339
Gorinchem, ,, ,, ,,	7585
Schiedam, ,, ,, ,,	10393
Schoonhoven, ,, ,, ,,	10703
Den Briel, ,, ,, ,,	20156
La Haye	17430
Heusden	1444
Nombre des habitants de la Hollande méridionale	481934

Le nombre des habitants de la Hollande septentrionale fut évalué alors à un quart de ce nombre, mais on n'en trouve pas le dénombrement dans cet opuscule. Ce qui y est dit à la page 19, savoir que le nombre total des habitants de la Hollande aurait été de

2400000, ou de $2\frac{2}{5}$ millions, en 1662, est tout-à-fait incroyable, et les pages 20 et 21 de ce même opuscule font voir qu'il ne s'agit pas ici d'une faute d'impression. — Le 42ième et le 43ième chapitre de l'opuscule ont aussi perdu leur actualité et ne sont pas du tout conformes à la vérité.

QUATRIÈME PARTIE.

Des principaux régistres des baptêmes et des décès.

Il est inconcevable qu'en voulant faire une statistique de la stabilité, de l'augmentation ou de la diminution du genre humain, on se base sur des régistres dont on n'est pas certain qu'ils sont exacts ou même dont on sait qu'ils sont inexacts et faux; je veux parler des régistres ordinaires des baptêmes et des décès. Lorsque dans ces régistres les nombres des naissances sont inférieurs à ceux des décès, on n'hésite pas à dire que la population de la localité considérée diminue, et si le contraire a lieu on admet qu'elle augmente, et par conséquent que l'état de la santé y est meilleur, que les femmes y sont plus fécondes, etc., sans examiner l'exactitude des chiffres.

Je discuterai donc la valeur des principaux régistres des baptêmes et des décès pour voir jusqu'à quel point on peut s'y fier et en quel estime on doit tenir les conclusions qui en sont tirées sans examen.

Premier Chapitre.

Des régistres des baptêmes et des décès à Londres.

M. Maitland raconte que les régistres des baptêmes de la ville de Londres sont les plus défectueux qui existent 1). Les paroles mêmes de cet auteur sont les suivantes: „Therefore 't were better the Bill were laid a side, than to suffer such a defective Account to be printed, to the dishonour of this incomparable City 2)," c.à.d.: „Il vaudrait donc mieux mettre le régistre de côté plutôt que de faire imprimer un rapport si défectueux et qui déshonore cette incomparable cité (savoir la ville de Londres)." Ensuite l'auteur dit qu'il serait désirable de donner plus de pouvoir

1) Philos. Trans. No. 450, p. 407.

2) „The History of London", p. 537.

aux comptables des paroisses de sorte qu'il leur serait possible de donner les chiffres exacts des naissances et des décès, attendu que les régistres actuels contiennent de grandes erreurs dans les chiffres des baptêmes et des décès 1). En 1603 les régistres comprenaient les baptêmes de 190 paroisses, en 1637 de 130, en 1632 de 132, et en 1734 de 145 paroisses; celles-ci toutefois ne constituent qu'une partie de l'église dominante à Londres, et les dissenters n'y sont pas compris. MAITLAND raconte qu'il y a à Londres 108 églises paroissiales, 71 chapelles et 147 sociétés où l'on prêche 2), de sorte que 181 sociétés ne communiquent pas à la compagnie des comptables des paroisses leurs statistiques des baptêmes ou des naissances, lesquelles par suite ne sont pas incorporées dans les régistres imprimés. Actuellement le nombre annuel des décès à Londres et dans les faubourgs est de 29450 environ. Le nombre annuel des baptêmes d'après les régistres a été de 17639 3), c'est là la moyenne de 14 années successives (1724—1737). Tous ceux qui habitent Londres ou qui y ont passé quelque temps savent que cette grande différence entre les nombres des décès et des baptêmes provient de la diversité des religions. Il paraît qu'avant l'existence de cette diversité les deux nombres étaient à-peu-près égaux entre eux. En effet, en prenant les premières listes régulières de M. MAITLAND, on voit qu'en 14 années 14902 personnes sont mortes de la peste; si l'on ne tient pas compte de celles-là, il reste 97083 personnes mortes de maladies ordinaires, contre 96644 enfants baptisés.

Voici encore une liste empruntée à GRAUNT 4) qui comprend beaucoup moins de personnes mortes de la peste et qui fait voir que les enfants nés vivants en ces années ont été plus nombreux que les personnes décédées.

1) Le même auteur, p. 537.

2) „The History of London", p. 800.

3) Le même, p. 537.

4) Pag. 71. Londres, 1662.

Année	Baptisés	Morts de maladies ordinaires	Morts de la peste	Nombre total des décès
1626	6701	7401	134	7535
1627	8408	7711	4	7715
1628	8564	7740	3	7743
1629	9901	8771	0	8771
1630	9315	9237	1317	10554
1631	8524	8288	274	8562
1632	9584	9527	8	9535
1633	9997	8392	0	8392
1634	9855	10899	1	10900
1635	10034	10651	0	10651
	90883	88617	1741	90358

Les nombres des enfants qui meurent chaque année en-dessous de 2 ans font voir combien est grand actuellement, à Londres et dans les faubourgs, le nombre annuel des naissances. Pendant dix années (1728—1737) on y a enterré chaque année en moyenne 10315 enfants âgés de moins de 2 ans. Le nombre annuel moyen des fausses couches et des enfants nés morts a été de 633 pendant 19 ans, d'après les régistres mortuaires de Londres. Si l'on retranche ce nombre de 10315, il reste 9682; c'est là le nombre des enfants nés vivants et morts à un âge inférieur à 2 ans 1);

1) M. SUSZMILCH (tableau 17) semble croire que les extraits des régistres mortuaires de Londres insérés dans mes „Hypothèses sur l'Etat de l'espèce humaine" p. 176, ne sont pas corrects; probablement cet auteur n'a pas remarqué (page 176 l. 8—10), que j'ai retranché le nombre des enfants nés morts de celui des enterrés qu'on trouve dans les régistres. Car les fausses couches et les enfants mort-nés qui y sont compris ne pouvaient servir au but de mon tableau. J'ai d'ailleurs dit clairement que toutes les personnes mentionnées dans le tableau de la page 176 étaient nés vivantes. Voici les nombres totaux des enterrés, y compris les avortons et les enfants mort-nés pendant 4 ans, tirés des régistres generaux qui sont publiés chaque année à Londres.

Année	Enterrés d'après les régistres	Avortons et mort-nés	Decédés, après avoir été nés vivants
1731	25262	673	24589
1732	23358	637	22721
1733	29223	656	28577
1734	26062	661	25401

Quant aux 3 autres années dont je ne possède pas les régistres généraux, dans

et le nombre réel est encore plus grand: en effet, M. MAITLAND a démontré que tous les décès ne sont pas mentionnés dans le régistre. 1) Toute personne qui se sert de sa raison et de son expérience peut aisément arriver à la conclusion que le nombre annuel des décès ne peut pas être supérieur de beaucoup au nombre annuel des naissances. Mais écoutons encore un autre auteur qui connaissait fort bien la ville de Londres, savoir l'auteur de l',,Avis important sur les calculs d'Arithmétique politique," A. D. L. C. Il dit fort à-propos: ,,La Providence maintient partout ailleurs une proportion plus juste entre les morts et les naissances; et dans les airs même les plus mauvais, il ne se voit point dans le cours naturel, que la différence soit si prodigieuse que d'aller à plus d'un tiers des premières." 2) Les régistres défectueux de Londres ont trompé bien des personnes, entre autres M. SUSZMILCH; cet auteur écrit que pendant 54 ans (1684—1737) le nombre des décès aurait surpassé celui des naissances de 397310 3) (au lieu de naissances il faut sans doute lire baptêmes), quoique pendant ces 54 ans il n'y ait eu aucune époque de peste à Londres et que d'après les régistres personne n'ait succombé à cette maladie. 4) L'auteur nommé calcule que dans cette ville le nombre annuel des naissances est au nombre annuel des décès comme 100 est à 145, et il en conclut que la ville de Londres est ,,pour l'Angleterre une peste perpétuelle" 5), ce qu'il cherche à confirmer par une foule de raisons. Je ne réfuterai pas cette

les deux dernières j'ai pris le nombre 658 pour le nombre annuel des avortons et des enfants mort-nes, comme on peut le voir à la page 176 dont je viens de parler. En 1735 j'ai pris 590 pour ce nombre, attendu que le nombre des décès avait été beaucoup plus petit en cette année. Le nombre moyen pour trois années est donc 635, et cette moyenne n'est supérieure que de 2 unités à celle trouvée d'après les régistres annuels des 4 années précédentes et de 15 autres années. M. SUSZMILCH ajoute que les extraits qu'il a lui-même tirés des régistres sont mieux faits. C'est à dessein que je n'y ai pas noté séparément les personnes de chaque âge au-dessus de 100 ans, parce que dans le régistre de 1739 il est fait mention d'une personne qui aurait atteint l'âge de 138 ans, ce que je ne puis admettre sans preuve décisive.

1) ,,The History of London", p. 540.

2) Biblioth. Raisonnée, Tome 25, pour les mois de Juillet, Août et Septembre 1740.

3) ,,Die Gottliche Ordnung", p. 53.

4) ,,Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine", p. 175.

5) ,,Die Gottliche Ordnung", p. 53.

thèse; je me contenterai de dire ici pour que d'autres ne suivent pas une opinion si peu fondée, que M. l'abbé SUSZMILCH m'a écrit de Berlin une lettre datée du 24 Décembre de l'année 1743, dans laquelle il confesse que la conclusion qu'il avait tirée des régistres de Londres est absolument erronée et qu'il sait maintenant combien les nombres des baptêmes indiqués dans ces régistres sont défectueux.

Je prends la moyenne des nombres des décès de personnes de différents âges survenus à Londres pendant 10 ans, tels qu'on les trouve dans la „Description de Londres" par M. MAITLAND, après en avoir retranché les enfants mort-nés. En attribuant ensuite aux enfants différents âges d'après la statistique du village Broek-in-Waterland, en admettant que les personnes mortes entre 10 et 20 ans aient vécu 15 ans, celles qui sont mortes entre 20 et 30 ans, 25 ans, et ainsi de suite; en multipliant ensuite les nombres des décédés avec les nombres d'années en question et en divisant la somme par le nombre des décédés, je trouve que les habitants de Londres ont vécu en moyenne $24\frac{3}{8}$ années. Ce résultat s'accorde avec la grandeur du rapport du nombre des habitants au nombre annuel des décès à Londres que MAITLAND a déterminé à l'aide d'un dénombrement fait dans cette ville en l'année 1631. En effet, ce rapport était de $24\frac{4}{7}$ à 1, comme je l'ai déjà dit dans la statistique de Rome. 1)

Deuxième Chapitre.

Des régistres des baptêmes et des décès à Breslau et à Vienne.

M. SUSZMILCH raconte qu'à Breslau, en 181 années, le nombre des décès a surpassé le nombre des naissances de 53890 2), et que le rapport du nombre des naissances à celui des décès y est de 100 à 126. S'il en était ainsi, il devrait y avoir généralement une grande affluence d'étrangers. Cependant le docteur HALLEY écrit que l'affluence des étrangers y est petite 3); et s'il a raison, la ville devrait s'être dépeuplée d'après ce qui précède; mais les

1) Voyez plus haut à la page 279.

2) „Die Gottliche Ordnung", p. 55. Berlin, 1741.

3) Philosoph. Trans. No. 196, p. 597.

régistres des baptêmes font voir le contraire. Pour m'éclaircir sur ce sujet j'ai demandé à quelqu'un de consulter les régistres des baptêmes et des décès de cette ville. La réponse que j'ai reçue au mois de Mars de l'année 1742 est la suivante: dans le territoire soumis à la juridiction de la ville, 2519 personnes sont mortes en 1741, 1329 enfants y ont été baptisés, 261 mariages ont été conclus; mais ces baptêmes ne se rapportent qu'aux luthériens et qu'aux réformés qui habitent le territoire de la ville. Les catholiques qui habitent la ville ou ses environs n'y sont pas compris; ni aussi les enfants des protestants qui habitent le territoire de l'évêque ou celui des couvents. — Les réformés n'y sont pas nombreux; ce n'est que depuis peu de temps qu'ils ont un pasteur. Il n'y a pas d'anabaptistes, excepté peut-être quelques-uns qui le sont en secret et qu'on ne connaît pas. Quelques familles juives ont le privilège d'y pouvoir habiter, mais celles-ci ont de nombreux adhérents et sous le nom de Juifs polonais un si grand nombre de Juifs s'introduisent dans la ville qu'il y en a toujours quelques centaines qui trafiquent en secret. Les vrais commerçants juifs polonais qu'on y voit volontiers sont ceux qui apportent de la laine, de la cire, du cuir et des fourrures et qui en échange exportent d'autres articles; ceux-ci s'y trouvent pendant toute l'année. Quel état peut-on donc faire d'un pareil régistre? On voit qu'il en est de même que des régistres de Londres: leur défectuosité résulte de la diversité des religions. Il faudrait avoir des régistres beaucoup plus exacts pour en conclure à l'état hygiénique d'une localité ou à d'autres particularités. Ceux qui n'entendent pas bien la statistique, donnent cours en partant des régistres à des idées confuses qu'on peut difficilement extirper, de même qu'il y a des hommes qui n'abandonnent pas facilement un système qu'ils ont une fois adopté.

Voici les nombres des baptêmes et des décès qui ont eu lieu en 58 ans d'après le régistre de Breslau 1). Mais comme en 1568, en 1588 et en 1599 la peste y a sévi, de sorte que 22124 décès ont eu lieu pendant ces trois années, je les ai omises. Je n'ai pas omis les années 1572, 1600 et 1616 quoiqu'alors il y ait eu également des mortalités extraordinaires.

---

1 Suszmilch, Table XIII, ex Rar. Art. & Nat. D. Kindman, & Satyr. Siles. Spec. 8, Wratisl. 1742.

					Baptisés	Enterrés
Depuis 1556 jusqu'à 1567	incl. donc en	12	années		16323	13960
,, 1569 ,, 1584		16			19477	17968
,, 1586 ,, 1598		13			15650	15115
,, 1600 ,, 1616		17			17285	20322
		En 58 années			68735	67365

A ce moment il n'y a pas eu de peste à Breslau pendant plus d'un siècle.

Quelquefois ces régistres défectueux sont corrompus encore davantage par ceux qui les copient; j'en donnerai ici un exemple.

Dans mes ,,Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine'', p. 189, j'ai donné les nombres des différentes catégories de personnes décédées à Breslau pendant 8 ans. Je les avais tirés des Transactions anglaises, mentionnées à la page 186. Par exemple, je trouve dans les Transactions, N⁰. 400, qu'il y avait parmi les décédés Married Men (Hommes mariés) 231, Married Women (Femmes mariées) 149, Widows & Widowers (Veufs et Veuves) 150, etc. Mais chez M. SUSZMILCH, tabl. XIII, on trouve: 237 Männer (Hommes), 149 Ehefrauen (Epouses), 150 Wittwen (Veuves); viennent ensuite les Junggesellen (Célibataires) et les Jungfern (Demoiselles). Dans des écrits de médecins, imprimés en 1736, en 1737, en 1738 et en 1741 1) les morts sont distingués en: Viri, Uxores, Viduae, Juvenes, Virgines, etc. Il s'ensuit qu'à la page 189 de mon ouvrage il faut lire au-dessus des colonnes du tableau qui se rapporte à 8 années: Hommes, Epouses, Veuves, Jeunes gens, Demoiselles. Il n'est pas possible de voir d'après ces écrits où l'on a placé les vieux célibataires et les vieilles demoiselles; je pense toutefois qu'on les a placés parmi les hommes et parmi les épouses, car les nombres des jeunes gens et des jeunes filles sont à-peu-près égaux entre eux. Dans le numéro cité des Transactions, il y a 6 hommes mariés de moins que dans la table XIII de M. SUSZMILCH. Les garçons nés morts en 1722 sont au nombre de 53 dans les Transactions, et les filles nées mortes au nombre de 30; mais chez M. SUSZMILCH je trouve 48 garçons nés morts et 29 filles. — Je ferai suivre ici la statistique de Breslau pour 7 années encore.

1) Satyr. Med. Siles. Specim. 1, 3, 6 et 7. Wratisl. & Lipsiae.

Année	Hommes	Epouses	Veufs et veuves	Jeunes gens	Jeunes filles	En-dessous de 10 ans Fils	Filles	Nés morts Fils	Filles	Nombre total des décès
1735	234	143	180	79	72	513	459	47	35	1762
1736	320	153	227	68	99	351	312	40	37	1607
1737	853	443	523	210	210	409	385	29	21	3083
1738	271	152	217	81	79	365	327	21	19	1532
1739	219	162	188	70	76	339	303	28	32	1417
1740	266	137	159	56	69	553	458	28	15	1741
1741	1033	212	225	120	80	429	360	40	20	2519
	3196	1402	1719	684	685	2959	2604	233	179	13661
De 1717 à 1726	2626	1497	1771	673	664	3938	3376	407	286	15238 1)
	5822	2899	3490	1357	1349	6897	5980	640	465	28899

On a noté pour l'année 1737 les décès survenus dans toutes les paroisses; mais pour les autres années on n'a noté que ceux qui ont été enterrés dans les églises et dans les cimetières des luthériens, comme cela est indiqué clairement dans le premier des régistres cités de Breslau. Car immédiatement après on lit ce qui suit. Si l'on voulait y ajouter les décès survenus dans les paroisses catholiques, tant celles qui sont dans que celles qui sont en-dehors de la ville, le dernier nombre s'il ne surpasse pas le nombre

1) Suszmilch, Tabl. XIII.

précédent (savoir celui de l'année 1735) y serait au moins à-peu-près égal. En 1740 il y avait parmi les décédés 1418 personnes habitant la ville et 323 personnes habitant ses environs.

Le fait que tant d'hommes sont morts en 1741 est dû à la guerre. Car en cette année a eu lieu, le 10 Avril, la bataille de Molwitz. Quelques blessés furent amenés dans la ville. Mais la majeure partie des décès provient de la forte garnison qui occupa la ville tout l'été.

Le nombre des garçons nés morts a été à celui des filles nées mortes dans cette ville, pendant 17 ans, comme 11 est à 8. En ajoutant aux 640 garçons et aux 465 filles dont j'ai parlé encore 469 garçons et 343 filles nés morts à Dresde et à Leipzig, je trouve 1109 garçons et 808 filles, nombres dont le rapport est à-peu-près le même.

J'ajouterai encore ici qu'à la page 190 de mes „Hypothèses sur l'état du genre humain" j'ai suivi les Transactions anglaises N°. 409, p. 119, en disant qu'en 1724, 1433 femmes et 1007 hommes seraient décédés à Vienne, en tout 2440 adultes et 2425 enfants; mais le douzième tableau de M. SUSZMILCH fait voir que ce nombre des décès se rapporte à l'année 1725 et il donne 1940 pour le nombre des adultes. Il faut donc certainement lire 933 1) pour le nombre des femmes, et ainsi notre remarque d'après laquelle il y aurait eu en cette année une forte mortalité parmi les femmes, était due à une erreur.

Troisième Chapitre.

Des régistres des baptêmes et des décès de la ville de Paris.

J'ai copié autrefois ces statistiques pour quelques années 2), mais j'ai encore certains doutes à cet égard: je ne sais pas si parmi les baptisés et les décédés sont compris ceux qui naissent et qui meurent à l'Hôtel-Dieu. Il est possible qu'l y a encore quelques cimetières d'hôpitaux, de couvents, etc. dont les morts ne sont pas trouvés sur les régistres ordinaires. Les enfants trouvés ne sont peut-être pas compris parmi les baptisés des régistres. Il n'est pas évident non plus jusqu'à quelle distance

1 Nom avons substitué ce nombre au nombre 1433 à la page 190 des „Hypothèses, etc." (N. d. tr.).

2) Consultez mes „Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine", p. 182 et 183.

de la ville les dits régistres des morts et des baptisés s'étendent. On prétend que les décès survenus à l'Hôtel-Dieu et aux Invalides sont compris dans les régistres; dans ce dernier établissement 343 personnes sont mortes chaque année, si l'on prend la moyenne de 7 ans. 1) On devrait savoir tout ceci et encore davantage avant de pouvoir déterminer approximativement le nombre des habitants de la ville de Paris, car si l'on commettait une omission de ce genre, on obtiendrait un nombre qui différerait beaucoup du nombre véritable; c'est ce qui ressort d'une statistique de l'Hôtel-Dieu relative à l'année 1738.

Le premier Janvier de l'année 1738 le nombre des malades à l'Hôtel-Dieu était de	2872
Pendant cette année le nombre suivant de malades y sont entrés..................................	20284
Nés..	1209
Somme....	24365
Décédés..	5158
Reste....	19207
Sortis en bonne santé..................................	16418
A la fin de l'année il restait encore le nombre suivant de malades:..................................	2789

Mais tous ces décédés ne proviennent pas de la ville de Paris ou de ses environs. Il y en a beaucoup qui sont amenés à cet Hôtel d'ailleurs, même de grandes distances.

En 1745, 18840 enfants légitimes et 3234 enfants naturels, 22074 enfants en tout, ont été baptisés à Paris; en cette même année, 4135 mariages y ont été conclus et 17322 personnes y sont décédées. En 1746, 9393 garçons et 8954 filles ont été baptisés à Paris, et de plus 3282 enfants naturels, parmi lesquels 1677 garçons et 1605 filles, donc en tout 21629 enfants. En cette année 4146 couples se sont mariés et 18051 personnes, dont 9418 hommes et 8633 femmes, sont décédées; parmi celles-ci il y avait aussi des ecclésiastiques des deux sexes. 2) Je trouve qu'en 1750, 19158 enfants ont été baptisés à Paris et qu'il y a eu 18697 décès, 4293 mariages et 3775 enfants trouvés.

1) „The History of London; the political account", Livre 3, p. 548. Londres, 1739.

2) Mém. de l'Acad. de l'Ann. 1746, p. 174.

Pendant les 28 dernières années (savoir celles qui précèdent l'année 1752), 116015 couples se sont mariés à Paris, 532588 enfants y sont nés et 522625 personnes y sont mortes. 1)

Quatrième Chapitre.

Régistre des Mariages, des Baptêmes et des Décès qui ont eu lieu à Genève en 1741.

Voici la statistique de cette ville que l'on m'a envoyée.

	Couples mariés	Enfants baptisés Garçons	Enfants baptisés Filles
A St. Pierre, à St. Germain, à l'Auditori et à l'Hôpital	68	.... 87..	..... 76....
A St. Gervais.............	24	.......103..	..... 96....
La Madeleine.............	28	.......114..	..... 99....
Dans le temple............	23	.... 50..	..... 51....
Dans l'église allemande....		....	....
Chez les luthériens........	2	.... 3..	....
	145 couples	357 garçons	322 filles

Décédés.

Enfants non baptisés......	45	De 40 à 45 ans........	29
Enfants en-dessous de 2 ans	117	De 45 à 50 ans........	18
De 2 à 3 ans............	16	De 50 à 55 ans........	16
De 3 à 4 ans............	7	De 55 à 60 ans........	22
De 4 à 5 ans............	13	De 60 à 65 ans........	48
De 5 à 10 ans...........	51	De 65 à 70 ans........	22
De 10 à 15 ans..........	22	De 70 à 75 ans........	53
De 15 à 20 ans..........	16	De 75 à 80 ans........	22
De 20 à 25 ans..........	26	De 80 à 85 ans........	26
De 25 à 30 ans..........	17	De 85 à 90 ans........	42
De 30 à 35 ans..........	20	De 90 à 95 ans........	7
De 35 à 40 ans..........	13	De 95 à 100 ans.......	1
	363		306

Le nombre total des décédés est de 669; il est inférieur de 10 à celui des baptisés. Autant de fois que 3 couples se marient

1) Cela ressort d'une lettre qui m'a été écrite par M. DU PRÉ DE ST. MAUR et qui est datée du 29 Oct. 1752.

chaque année, autant de fois 14 enfants naissent. Deux choses me semblent étranges dans ce régistre des décès. D'abord que si peu d'enfants âgés de moins de 2 ans sont morts et en second lieu qu'on trouve tant de vieillards parmi les décédés. Je ne saurais jusqu'à présent donner aucune raison de la première. Quant à la seconde, serait-il possible qu'un grand nombre de gens âgés qui ont de quoi vivre et qui quittent la France pour des affaires de religion, se fixent à Genève et y terminent leur vie? Ou l'état hygiénique du pays pourrait-il expliquer le grand nombre de décès de vieillards? Cette dernière explication me paraît peu probable. Je pense qu'on devrait disposer de plus de statistiques que de celles qu'on possède actuellement pour pouvoir déclarer qu'une localité ou qu'un pays en surpasse un autre dans l'état de santé ou dans la fécondité de ses habitants.

CINQUIÈME PARTIE

Différentes questions ayant rapport à l'état des hommes en général ou en particulier.

Premier Chapitre

Le rapport du nombre des garçons baptisés à celui des filles baptisées.

D'après GRAUNT, d'après M. MAITLAND, d'après les Philos. Trans. No. 328, et enfin d'après les régistres qui sont publiés chaque année à Londres, je trouve qu'en cette ville, depuis 1629 jusqu'à 1744, donc pendant 116 années, 783145 garçons 1) et 740113 filles ont été baptisés par une partie des pasteurs appartenant à l'église dominante; ces nombres sont entre eux à-peu-près comme 91 est à 86 ou comme 364 est à 344. Autrefois j'ai trouvé d'après les nombres relatifs à 101 ans, le rapport 52 : 49 ou

1) La Transaction citée donne, à la page 189, un nombre supérieur encore de 300 à celui donné par GRAUNT pour l'année 1659, mais la bibliothèque de feu HANS SLOANE fait voir que GRAUNT possédait le vrai nombre; nous avons donc suivi ce dernier.

364 : 343 ; le dernier nombre ne diffère que d'une unité de celui que nous venons de trouver. A Westzaandam en 124 ans 9005 garçons et 8511 filles ont été baptisés ; le rapport de ces deux nombres s'accorde à fort peu près avec celui des nombres de Londres. En 40 ans (1700—1739) on a baptisé en tout 14655 garçons et 13844 filles dans quatre églises d'Amsterdam, savoir la vieille église, la nouvelle église, l'église de l'île et la chapelle „Oude-Zijds". Si le nombre des filles baptisées avait été plus grand de 6, le rapport aurait été parfaitement égal au rapport des nombres de Londres. Mais lorsque le nombre d'années qu'on considère et les nombres des enfants baptisés sont petits, on ne peut pas s'attendre à ce que le rapport restera invariable pour chaque village séparément. Pour montrer cela j'écris ici les nombres des enfants baptisés dans les villages suivants.

			Garçons	Filles
A Kwadijk	en 107 ans	....	899	809
„ Oosthuizen	„ 77 „	....	867	799
„ Jisp	„ 10 „	....	127	136
„ Warder	„ 10 „	....	161	157
„ Wormerveer	„ 10 „	....	116	118
„ Westzaanen	„ 12 „	....	862	861
„ Uitdam	„ 10 „	....	51	47
„ Loenen	„ 11 „	....	445	406
			3528	3333

Les sommes des baptisés dans tous ces villages ont de nouveau entre elles le même rapport que les sommes correspondantes relatives à la ville de Londres : la différence n'est que d'une fille. Outre les villages précédents il y en a cinq encore dont je possède séparément les nombres des garçons baptisés et des filles baptisées. Ils ne montrent pas cette régularité dans le rapport des nombres. Voici les noms de ces villages

			Garçons	Filles
A Purmerland	en 42 ans	....	277	238
„ Oostzaanen	„ 44 „	....	1607	1627
„ Wormer	„ 51 „	....	1508	1563
„ Westgraftdijk	„ 10 „	....	104	68
„ Vreeland	„ 10 „	....	75	65
			3571	3561

J'ajouterai encore quelques nombres d'enfants baptisés en Allemagne.

	Garçons	Filles	
Dans le duché de Magdebourg en 23 ans (entre 1702 et 1736)........	90032	85386	1)
Dans différents villages (1731—1733 et 1735—1736).................	13590	12684	1)
A Breslau en 7 ans (1735—1741)...	4494	4109	2)
	108116	102179	

Cette statistique s'accorde à fort peu près avec celle de Londres. En appliquant la règle on ne trouve qu'un écart de 3 filles. — En tout, si j'exclus les 5 villages hollandais que j'ai nommés, on a baptisé dans ces localités 918449 garçons et 867990 filles; en se servant du rapport trouvé on obtient un nombre de filles inférieur de 5 seulement au nombre réel. Le nombre des garçons baptisés dans ces localités surpasse de 50459 celui des filles baptisées.

A Berlin on a baptisé en 8 années, savoir les années 1724, 1732 3) et 1734—1739, 4), 13883 garçons et 13187 filles. Le rapport de ces deux nombres n'est pas absolument égal au rapport correspondant trouvé à Londres, mais cependant la différence est petite; car le nombre des filles trouvé par l'expérience est trop grand de 67. En considérant un plus grand nombre d'années on obtiendrait probablement un écart plus faible.

Les nombres suivants font voir que la dite règle est applicable aussi aux Indes occidentales. A Bridge-town en Barbados, 651 enfants sont nés en 8 ans (1737—1744), savoir 334 garçons et 317 filles. Ce dernier nombre ne diffère que d'une unité de celui qu'on trouve d'après le rapport 91 : 86. 5)

On voit donc que la nature ne produit pas indifféremment un garçon ou une fille; ce n'est pas le hasard qui règle les naissances; on y remarque au contraire le sage gouvernement du Dieu Tout-puissant, comme quelques personnes érudites l'ont déjà dit. Mais je n'admets pas le but auquel ce surplus de garçons devrait

1) SUSZMILCH, Die Gottliche Ordnung, p. 138.

2) Act. Wratislaviensia.

3) SUSZMILCH, p. 139.

4) Le même auteur, Table XV.

5) Phil. Trans. No. 487, p. 345.

servir à leur avis; je l'ai déjà dit dans un autre ouvrage 1) et de nouvelles recherches m'ont confirmé dans ma manière de voir.

Deuxième Chapitre.

Les décès qui surviennent sur mer.

J'ignore si l'on a jamais fait une statistique de ces décès, quoiqu'il ne soit pas inutile d'en connaître à-peu-près le nombre, surtout celui des décès qui se produisent dans les longs voyages tels que ceux vers les Indes orientales ou occidentales. Je prendrai pour exemple quelques navires qui ont fait le voyage de ma patrie vers le cap de la bonne espérance. Les nombres des décès varient beaucoup d'un voyage à l'autre. Parmi 73 navires qui ont fait, la plupart entre 1734 et 1740, le voyage de ce pays-ci vers le cap nommé, il y en avait deux dont le premier avait un équipage de 183 hommes et le second un équipage de 170 hommes; sur chacun de ces deux navires un seul homme est mort pendant tout le voyage; mais sur trois autres navires plus d'un tiers de l'équipage a succombé. Les 73 navires avaient en tout, en quittant le port, un équipage de 15889 personnes, dont 1733 sont mortes pendant le voyage du cap, c. à. d. en 5 mois environ; cela fait à-peu-près 11 %. Sur 43 navires qui ont tous atteint le cap en moins de 160 jours, 8 % seulement de l'équipage sont morts. Plus le voyage dure longtemps, plus en général le nombre des décès est grand. Il ne revient pas au même de faire ou de ne pas faire le tour de l'Angleterre. Les nombres sont différents aussi pour un temps de paix et pour un temps de guerre. En effet, en temps de paix on a mieux l'occasion de choisir des jeunes gens bien portants en apparence; en temps de guerre il faut souvent se contenter de choisir ceux qu'on peut obtenir.

Sur 11 navires, portant un équipage total de 1203 personnes, et qui ont fait à différentes époques le voyage de retour de Batavia à la patrie, 34 sont mortes entre le cap et Batavia et 46 entre le cap et la patrie. La quinzième partie de ces gens a donc succombé en 8 mois environ; il s'ensuit qu'en un voyage total, aller et retour, la cinquième partie environ de l'équipage meurt; il faut savoir qu'il y a parmi eux beaucoup de soldats et d'étrangers qui n'ont pas l'habitude de faire des voyages de mer.

---

1 Consultez mon „Appendice aux hypothèses sur l'état de l'espèce humaine", p. 235.

Il ne faut pas croire qu'ainsi tout est dit et que nous avons trouvé le vrai rapport. Je n'ai donné ces chiffres que pour amener d'autres auteurs à examiner la question plus en détail.

Troisième Chapitre.

Décès d'accouchées.

Ce serait une méthode défectueuse que de déterminer le nombre de ces décès d'après les régistres de Londres ou d'après d'autres régistres imprimés. C'est pourquoi j'ai tâché de découvrir, en me basant sur la statistique souvent mentionnée du village Broek-in-Waterland, quel est le nombre de ces femmes qui meurent pendant ou peu de temps après l'accouchement. Depuis le commencement de l'année 1654 jusqu'au 19 Octobre 1742 le nombre d'accouchées à Broek a été de 1923; et voici les nombres des décès qui se sont produits parmi elles.

	Décès
Endéans 24 heures après l'accouchement	6
,, 1 à 8 jours...............	22
,, 9 à 14 ,, ...	9
,, 15 jours à 3 semaines.......	7
,, 22 ,, ,, 30 jours..........	6
,, 1 mois ,, 6 semaines.......	5
,, 6 à 12 semaines...........	5
,, 12 semaines à 3 mois.......	1
	61

Parmi ces femmes décédées sept avaient mis au monde des enfants morts, six avaient mis au monde des jumeaux, 24 des fils vivants, 24 aussi des filles vivantes. Si la 25ième partie des accouchées, c.à.d. 77 femmes, ont eu un enfant mort, il s'ensuit que sur 11 de ces femmes-là il en meurt une. Si nous admettons que la 50ième partie de toutes les femmes en question ont mis au monde des jumeaux, le nombre de ces femmes-là doit être de 38 ou de 39; et parmi elles 6 sont mortes. Parmi les 1808 ou 1807 femmes qui restent et qui ont toutes eu un fils vivant ou une fille vivante, 48 sont mortes; il en résulte que sur 75 de ces femmes il en meurt 2. — En moyenne la 32ième partie de toutes les femmes accouchées meurent. Endéans les 9 premiers jours après l'accouchement il meurt autant d'accouchées que dans les 81 jours qui suivent.

Ce résultat nous porte à croire que de toutes les demoiselles qui se marient chaque année à Harlem et à Amsterdam la huitième ou la neuvième partie meurent pendant ou après l'accouchement. C'est un sujet digne de ceux qui ont l'occasion de s'en occuper que de construire une statistique de ce genre en se basant sur de plus grands nombres.

Dans le manuscrit nommé de Broek on trouve indiqué l'âge de 26 femmes mortes en couches; les autres étaient étrangères ou du moins on n'en donnait pas l'âge. Dix d'entre elles avaient les âges suivants: 21, 22, 24, 26, 27, 28, 34, 35, 40 et 42 ans. En disant 21, j'entends entre 21 et 22 ans. Les âges de dix autres, 2 à 2, étaient de 25, 29, 30, 33 et 37 ans; et ceux des six autres, prises 3 à 3, de 31 et 32 ans respectivement; cela fait un peu plus de $30\frac{1}{2}$ ans en moyenne.

Parmi les personnes enterrées à Westzaandam on a noté en $8\frac{1}{3}$ ans 87 femmes mortes en couches; cela fait un peu plus de 10 par an. Or, 254 enfants y naissent vivants en moyenne; j'y ajoute encore 10 enfants à cause de ceux qui naissent morts; le nombre total est alors de 264. Il en résulte que sur 26 femmes une est morte en couches. — Les régistres anglais nous montrent que sur 70 femmes accouchées il n'en meurt qu'une 1). A Broek une seule femme sur 69 est morte endéans 8 jours après l'accouchement; c'est en ce même sens sans doute qu'il faut lire les régistres de Londres.

Quatrième Chapitre.

Des jumeaux.

M. SUSZMILCH est fort réservé sur ce sujet. Il dit qu'on a encore peu considéré la question des jumeaux qui mérite cependant un examen sérieux; à son avis, les rares données fournies par quelques villes sont absolument insuffisantes pour en tirer une règle concernant les jumeaux. Il estime incertaines les conclusions qu'on en peut tirer et exige un plus grand nombre encore de régistres de Londres et d'Allemagne pour pouvoir arriver à des résultats plus certains 2). Je n'ai pas jugé nécessaire de faire chercher dans les livres des baptêmes un grand nombre de jumeaux quoique

1 „Die Gottliche Ordnung" par J. P. SUSZMILCH, p. 302 et 305, Berlin, 1741.

2) Même ouvrage, p. 124.

l'occasion ne m'en manquât point, attendu que dans bien des cas le rapport du nombre total des baptisés à celui des jumeaux baptisés sera différent. En effet, les réformés ne baptisent que dans les églises et doivent donc attendre jusqu'au jour du sermon, de sorte que souvent un des faibles jumeaux meurt avant le baptême et qu'un seul des deux est donc baptisé; en ce cas le livre des baptêmes n'indique que ce dernier seul sans parler d'enfants jumeaux. Les luthériens et les catholiques baptisent aussi à domicile et les derniers ne négligeront pas facilement le baptême. A Londres on attend beaucoup plus longtemps que chez nous avant que de faire baptiser les enfants. La chose principale qu'il s'agit de déterminer c'est le nombre des enfants jumeaux qui naissent vivants. Sur ce sujet on n'a encore découvert que je sache que les données que j'ai fait imprimer autrefois en me basant sur la statistique bien construite du village Broek-in-Waterland 1). Je répéterai ici brièvement ces données. Parmi 1807 enfants nés vivants et 3 enfants mort-nés il y avait 38 couples de jumeaux, à savoir trois couples dont un des enfants (une fille, deux garçons) est né mort, et 35 couples nés vivants, à savoir 10 couples de garçons, 8 couples de filles et 17 couples composés d'un garçon et d'une fille; il y avait en outre un couple de garçons dont l'un naquit un jour après l'autre, et une femme née à Hoorn y mit au monde trois garçons et une fille à la fois, tous vivants. Parmi les 35 couples de jumeaux il y en avait 13 dont les deux enfants ou l'un deux moururent peu après la naissance 2). On n'aurait donc pu baptiser dans l'église que 25 couples. Il s'ensuit qu'il doit y avoir généralement parmi 51 enfants nés vivants, ou parmi 72 enfants baptisés, un couple de jumeaux. Il est possible que la valeur de ce rapport est quelque peu différente pour un nombre de naissances supérieur à 1810 ou pour d'autres localités; mais la différence est probablement petite. Dans la ville de Harlem il y a eu en moyenne, depuis quelques années, chez les réformés, un couple de jumeaux sur 76 enfants baptisés. On voit par ce qui précède qu'il y a une grande différence entre le rapport du nombre des jumeaux à celui des enfants nés vivants d'une part et celui du nombre des jumeaux à celui des enfants baptisés d'autre part. M. SUSZMILCH raconte qu'à Neurembourg

1) Appendice aux „Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine" p. 238.

2) Il n'est pas exact de dire avec M. SUSZMILCH que „13 couples sont morts peu après la naissance."

il y avait, en 1721, 16 couples d'enfants jumeaux sur 1084 enfants nés. J'ai en effet trouvé ces nombres dans les Transactions anglaises, No. 381, p. 35, seulement on n'y parle pas d'enfants nés, mais d'enfants baptisés (christened). M. SUSZMILCH raconte en outre qu'en 4 ans 3540 enfants sont nés à Leipzig, parmi lesquels 59 couples de jumeaux d'où il conclut que parmi 70 enfants nés il y avait un couple de jumeaux. Il y aurait donc eu moins de jumeaux qu'à Broek; mais il y a ici une faute d'impression ou une erreur de calcul, car au lieu de 70 il faut lire 60. L'auteur ne dit pas à quelles années ces nombres se rapportent, mais je trouve dans les Transactions, No. 387, 400 et 409, que pendant les 5 années mentionnées plus loin, il y avait 63 couples de jumeaux parmi 4446 enfants baptisés. 1) Le rapport du nombre des baptisés à celui des jumeaux pendant ce même temps y a été de 70 à 1. Enfin M. SUSZMILCH écrit qu'à Vienne en 1718 il y avait 18 couples de jumeaux sur 4242 enfants nés, d'où il déduit qu'il y avait un couple d'enfants jumeaux sur 235 enfants nés. Mais dans les mêmes Transactions, No. 380, p. 457, je trouve qu'en 1718, 4242 enfants ont été *baptisés* (et non pas *nés*, comme le dit M. SUSZMILCH) à Vienne, parmi lesquels il y avait 48 (et non pas 18) couples de jumeaux, outre encore trois enfants jumeaux. Voici les nombres des enfants baptisés dans différentes villes avec les nombres des enfants jumeaux qui s'y trouvaient suivant les régistres. 2)

	Baptisés	2 Jumeaux	3 Jumeaux
A Francfort sur Main, chez les protestants (1695 et 1725)	1498	21	
,, Saxenhausen (1695 et 1725)	314	6	
,, Vienne (1718)	4242	48	1
,, Leipzig pendant 5 ans (1721—1725)	4446	63	1
,, Regensbourg chez les protestants (1721, 1724 et 1725)	816	12	
,, Neurembourg (1721)	1084	16	
,, Weimar (1722)	190	6	
,, Gera (1724)	296	6	
,, Cobourg (1725)	206	3	
	13092	181	2

1) ,,Christened'', suivant les Transactions.

2) J'ai trouvé ces nombres dans les Transactions No. 229, 380, 381 et 409.

Je ferai encore suivre ici les nombres des enfants nés dans quelques villages hollandais, avec les nombres des enfants jumeaux (2, 3 ou 4) qui se sont trouvés parmi eux:

	Baptisés	2 Jumeaux	3 Jumeaux	4 Jumeaux
A Oostzaandam, en 111 années ...	17566	230	2	1 1)
,, Kwadijk, en 107 années	1708	39	1	2)
,, Broek-in-Waterland, en 85 années.	1807	25		3)
,, Purmerland, en 42 années	515	7		4)
	21596	301	3	1

Dans les villes et villages nommés on a baptisé en tout 34688 enfants, parmi lesquels 482 couples de jumeaux; en outre il y a eu 5 fois une naissance de 3 jumeaux et 1 fois de quatre jumeaux, Le rapport de ces nombres est à-peu-près égal à celui trouvé pour les villes allemandes considérées plus haut; il me semble donc que nous en avons trouvé à-peu-près la vraie valeur.

Parmi tant de milliers de naissances dont on a cherché pour moi les particularités en se basant sur des ouvrages et des écrits auxquels on ajoute généralement foi pour autant que des statistiques construites par des hommes peuvent être dignes de foi, je ne trouve pas un seul cas de 5 enfants jumeaux nés vivants ou baptisés. Cependant je ne vois dans la nature des choses aucune raison pour estimer une telle naissance impossible; même la différence entre une naissance et 4 et une naissance de 5 enfants est beaucoup plus petite que celle entre une naissance de 2 et de 3 ou 4 enfants, dont on a une connaissance certaine. Dans les journaux j'ai trouvé fait mention dans ces dernières années de deux cas qui méritent d'être examinés sérieusement. Le premier cas est mentionné par un journal de Paris du 18 Janvier 1751; il y est dit qu'à Chateau-Thierry en France une femme à récemment mis au monde 5 enfants, savoir 4 garçons et 1 fille, lesquels ont tous été baptisés, mais dont un seul a survécu. Le second

1) Je tiens ces données de M. JACQUES OOSTWOUD.

2) Et celles-ci de M. PIERRE ANNES.

3 Il s'agit ici en réalité d'enfants *nés* et non pas d'enfants *baptisés*, mais la différence n'est probablement pas grande.

4) D'après M. DIRK DUIFS.

cas m'a été annoncé de Vienne au commencement de cette année: au mois de Décembre de l'année 1752 l'épouse d'un fonctionnaire vivant à Holtzoster dans le département bavarois Burghausen aurait mis au monde endéans 2 fois 24 heures, 5 enfants vivants et bien faits de même grandeur, savoir 2 garçons et 3 filles, mais aucun d'eux n'aurait vécu plus d'une demi-heure. Nous pouvons donc admettre (attendu que des cas si exceptionnels sont généralement indiqués dans les journaux) qu'une telle naissance quintuple a lieu une ou deux fois par an parmi un nombre d'enfants aussi grand que celui de ceux qui naissent en France et en Allemagne; c'est une chose fort rare, mais non pas incroyable.

Mais le cas de la Comtesse de Hennenberg, soeur du roi GUILLAUME, qui aurait donné naissance à 365 enfants simultanément (car c'est ainsi qu'on a compris autrefois le récit des enfants aussi nombreux que les jours de l'année) me paraît absolument fantasque et contraire à la nature; du moins lorsqu'on l'entend dans ce sens. Pour ne pas être trop long je ne citerai pas ici ce qu'en écrivent ERASMUS, SCRIVERIUS et beaucoup d'autres auteurs qui traitent les antiquités néerlandaises. Dans tout ce récit je ne trouve que deux choses qui paraissent quelque peu sûres, savoir l'épitaphe de la comtesse et celle de son fils aîné, 1) où il est dit qu'elle est morte le Vendredi-Saint de l'année 1276 2) et son fils le 9 Novembre de l'année 1250. L'année dans laquelle cet étrange accouchement aurait eu lieu est absolument incertaine. Un auteur veut que la comtesse soit morte en couches, un autre qu'elle ait vécu encore plusieurs années. 3) Quant au tableau de l'église de Loosduinen, il doit n'avoir été construit que longtemps après, puisqu'il y est question de chroniques imprimées et écrites. Il est probable aussi que ce tableau a été quelquefois renouvelé et qu'on en a omis quelques parties devenues illisibles. Le tableau dit que cette naissance merveilleuse aurait eu lieu le

---

1) SCRIVERIUS, dans sa „Pierre de touche d'une vieille chronique de Gouda", p. 255 et 256. Amst. 1663.

2) Le jour est appelé Parasceves ce qui veut dire le Vendredi avant Pâques et aussi quelquefois le Vendredi de chaque semaine. Consultez „Le nom de certains jours" p. 108, dans l'ouvrage „L'art de vérifier les dates" Prem. Part. Paris, 1750.

3) SCRIVERIUS, dans sa „Description des comtes hollandais" et le Compilateur de la grande Chronique belge, publiée à Francfort en 1607. On trouve la même chose dans l'Histoire de Heda, p. 206, Utrecht, 1643.

Vendredi-Saint de l'année 1276, et que la comtesse était alors âgée de 42 années. Or, l'épitaphe de son fils semble indiquer (puisqu'il y est appelé Bonae indolis puer) qu'il était âgé de quelques années au moment de sa mort. J'admets qu'il était âgé de 5 ans; il aurait donc été né en 1245. Mais si MARGUERITE, en 1276, avait eu 42 ans, elle n'en aurait eu que 11 en 1245; c'est là une chose impossible. Je pense aussi que la comtesse a vécu encore quelques années après cet étrange accouchement lequel, comme nous l'avons dit, a eu lieu un Vendredi-Saint, à 9 heures du matin. La genèse de cette histoire ne serait elle pas peut-être la suivante? Supposons que MARGUERITE fût âgée de 26 ans au moment de la mort de son fils aîné, ce qui ne me semble pas absurde. Elle aurait donc eu 42 ans en 1266. Si la naissance dont nous parlons a eu lieu le Vendredi-Saint de cette année, ce doit avoir été le 26 Mars. 1) A cette époque on commençait l'année, en France et dans les pays environnants, avec le jour de l'Annonciation 2), c. à. d. le 25 Mars; comme cela a été l'usage en Angleterre jusqu'à l'année passée 1752, d'après le calendrier des tribunaux, usage qui n'a été aboli que récemment par l'introduction du Nouveau Style. 3) Le Vendredi avant Pâques était donc le deuxième jour de l'année, et MARGUERITE doit avoir donné naissance à un garçon et à une fille. Le tableau dit en parlant du baptême des enfants „Quorum Masculi quotquot erant JOANNES, Puellae autem omnes ELIZABETHAE vocatae sunt", et dans l'incription hollandaise „Van de welke de Knegtjes, zoveel als die waren, JOANNES, en de Meisjes alle ELIZABETH genaamd zijn. 4) On a probablement donné le nom de JEAN ou de JOANNES au garçon et celui d'ELISABETH à la fille. Je le répète, l'ancienneté du tableau n'est pas suffisante à mon avis pour prouver qu'il y a eu plus de deux enfants; d'aucuns prétendent, comme on sait, qu'il y en aurait eu 364 ou

---

1) En cette année la fête de Pâques eut lieu le 28 Mars; consultez „l'Art de vérifier les dates", p. 52.

2) Même livre, p. 18 et suiv. En 1564 CHARLES IX a publié un édit d'après lequel, à partir de ce moment, l'année devait commencer par le mois de Janvier dans tous les actes publics et privés. Consultez la p. 21.

3) Mercure européen, 1752, IIième partie, p. 183.

4) CRETZER, „Description de la Haye", p. 123—132. Amsterdam, 1711.

365. Mais quelle absurdité que de donner le même nom de baptême à tant de garçons et à tant de filles! Il me semble que la comtesse doit être décédée le Vendredi-Saint, ou un autre Vendredi, 10 ans après avoir mis au monde le couple de jumeaux dont nous avons parlé. De cette façon tout s'accorde assez bien sans qu'il soit besoin d'avoir recours à un miracle. Quant à mon hypothèse au sujet de l'âge de la comtesse au moment de la mort de son fils aîné, elle est pleinement confirmée par une remarque que j'ai trouvée plus tard dans la „Vie de FLORIS V" par SCRIVERIUS, p. 555: il écrit à cet endroit que la „petite chronique hollandaise" et celle de Varnewijk racontent que l'accouchement en question aurait eu lieu en 1266. Je sais qu'on a eu aussi la coutume autrefois de faire commencer l'année par la fête de Pâques, ce dont il y a des exemples relatifs à l'année 1363. 1) S'il en a été ainsi, le texte devrait s'expliquer comme suit: la comtesse aurait eu un nombre d'enfants égal au nombre des jours de l'année qui restaient encore, savoir deux. Mais cette dernière explication me semble peu probable pour d'autres raisons.

Cinquième Chapitre.

Décès d'enfants.

J'ai écrit autrefois qu'à peu près rien n'était connu là-dessus avec certitude, à l'exception des statistiques que j'ai tirées d'un manuscrit relatif au village de Broek-in-Waterland. Mais à cette époque je n'ai pas eu ce livre en ma possession pendant assez de temps. L'ayant demandé et reçu de nouveau il y a peu de temps, j'ai tiré des régistres mortuaires, les dates exactes des décès qui ont eu lieu pendant les trois premières années et celles des décès de quelques personnes dont on avait négligé de mentionner le jour et l'année. J'ai comparé cette liste avec celle des naissances pour découvrir ainsi l'âge des enfants décédés.

Depuis le commencement de l'année 1654 jusqu'au 19 Octobre 1741, 951 garçons et 916 filles sont nés vivants à Broek; parmi eux les nombres suivants de décès se sont produits à bas âge.

---

1) „Dissertation sur les dates des Chartes et des Chroniques" p. 17 et suiv. Voyez aussi la préface de la Chronique de GERVASIUS.

Agés de plus de … mois	et de moins de … mois	Garçons	Filles	Somme
0	1	179	142	321
1	2	71	48	119
2	3	56	33	89
3	4	30	17	47
4	5	15	8	23
5	6	8	18	26
6	7	9	5	14
7	8	7	14	21
8	9	5	8	13
9	10	4	6	10
10	11	6	5	11
11	12	6	2	8
		396	306	702

Ce tableau fait voir que les $\frac{5}{12}$ des garçons et un tiers environ des filles sont décédés à un âge inférieur à un an; tandis que 555 garçons et 610 filles ont vécu plus longtemps. En ajoutant à cette statistique celle de Purmerland, j'obtiens les nombres suivants: sur 1228 garçons 497 et sur 1154 filles 381 sont décédés à un âge inférieur à un an. Sur 42 garçons nés vivants 17 sont donc décédés, et sur 3 filles une. J'ai examiné de plus quels sont les nombres des garçons et des filles décédés chaque année à un âge inférieur à 10 ans. Les deux premières lignes semblent montrer qu'au bout de deux mois le surplus des garçons nés a déjà disparu.

Depuis le commencement de l'année 1654 jusqu'au 19 Octobre 1732, 850 garçons et 822 filles sont nés vivants à Broek. Voici les nombres de ces enfants décédés aux âges indiqués dans le tableau.

Entre …	et … ans	Fils	Filles	Somme
0	1	353	274	627
1	2	29	21	50
2	3	20	14	34
3	4	16	11	27
4	5	13	14	27
5	6	2	6	8
6	7	3	6	9
7	8	5	2	7
8	9	3	5	8
9	10	3	6	9
		447	359	806

Il s'ensuit qu'un peu moins de la moitié des enfants nés vivants meurent à un âge inférieur à 10 ans, ce qui s'accorde assez exactement avec les régistres mortuaires donnant l'âge des personnes décédées ; seulement dans ces régistres on ne fait mention que des personnes décédées et non pas de tous les enfants nés ce qui fait une différence notable pour quelques localités. Dans les endroits tels que Londres, Rome et Amsterdam, où se rendent un grand nombre d'étrangers, le nombre des décès surpasse chaque année celui des naissances ce qui est contraire à la règle générale. Sur 100 personnes nées vivantes et décédées on trouve dans les régistres de Londres 38 enfants en moyenne morts à un âge inférieur à 2 ans. Si nous partons de l'hypothèse que 95 enfants naissent à Londres contre 100 qui y meurent, il s'ensuit que $\frac{2}{5}$ de tous les enfants nés vivants meurent à un âge inférieur à 2 ans. Sur 200 enfants, garçons et filles tels qu'ils naissent, il en meurt 93 à un âge inférieur à 6 ans ; sur 40 garçons 21 à un âge inférieur à 10 ans ; sur 16 filles nées vivantes 7 à un âge inférieur à 10 ans. Si dans la statistique de Broek les nombres étaient un peu plus grands, la règle pour les enfants morts entre 3 et 10 ans serait plus manifeste; mais le nombre total des enfants décédés est assez grand pour que l'écart de la règle soit petit. Cette statistique présente d'abord l'avantage suivant : on est certain de l'exactitude des données, attendu qu'elle donne pour chaque enfant l'année, le mois et le jour de la naissance et du décès. Une mortalité extraordinaire, quand même elle aurait duré 2 ans p. e., ne peut avoir altéré les nombres que dans une faible mesure : en effet, — et c'est là un deuxième avantage de cette statistique — elle s'étend à près de 88 années et la longueur de ce temps annulle les différents écarts de l'Ordre Universel.

Sixième Chapitre.

Remarques sur le tableau du docteur HALLEY.

Ce grand astronome s'est servi des régistres mortuaires de la ville de Breslau pour construire un tableau devant servir non seulement à calculer les rentes viagères, mais aussi à déterminer le nombre des personnes vivantes habitant simultanément cette ville. On peut en outre tirer de ce tableau un grand nombre de détails utiles. Je suis loin de vouloir diminuer la gloire de ce

savant ou de vouloir faire mépriser sa belle invention: sa table a été l'ouvrage sur lequel on s'est basé uniquement pendant plus de 50 ans. Toutefois il faut avouer que les régistres de Breslau ne permettent pas d'arriver à la connaissance des nombres des décès des jeunes enfants. J'ai déjà dit auparavant que les 1238 enfants qui sont indiqués comme nés annuellement à Breslau sont en réalité les enfants baptisés chez les luthériens habitant cette ville. On n'a pas fait dans cette ville un véritable recensement qui pourtant aurait été nécessaire pour obtenir le nombre des habitants. Le nombre de 34000 habitants n'est que le résultat d'un calcul basé sur celui des personnes enterrées. — Considérons ce tableau plus en détail. Il en résulte que des 1238 enfants nés à Breslau en un an, 238 seulement seraient morts la même année. En effet, il reste 1000 enfants âgés de 0 à 1 an. Mais d'après la statistique du village Broek 318 garçons sur 951 sont morts dans l'année même de leur naissance; et sur 916 filles, 239 seulement; cela fait à-peu-près un tiers pour les garçons et un peu plus d'un quart ou plutôt $\frac{25}{96}$ pour les filles. 1) Il s'ensuit qu'on peut adopter la règle suivante: autant de fois qu'en une localité vivent 7 enfants d'un âge inférieur à 1 an; autant de fois il y naît en un an dix enfants. Si nous supposons qu'à Breslau vivent 1000 enfants âgés de 0 à 1 an, il y naîtra donc, d'après ce dernier rapport, 1428 enfants par an, ou plutôt 1425, en faisant un calcul encore plus exact tant pour les filles que pour les garçons; la différence qui est négligeable, n'est d'ailleurs que de 3 enfants. Je me servirai de ce dernier nombre et j'admettrai que le nombre des garçons nés vivants est à celui des filles nées vivantes comme 52 est à 49; je trouve ainsi que 734 garçons et 691 filles naissent vivants à Breslau. Or, si sur 951 garçons il en meurt 318 la même année, il doit en mourir 245 sur 734; il en reste donc encore 489. Et

1) Voici la méthode d'après laquelle j'ai tiré ces nombres du manuscrit de Broek. En 1690 par exemple, 11 garçons et 10 filles sont nés vivants à Broek; parmi ceux-ci 5 garçons et 3 filles sont décédés la même année. Par conséquent le dernier Décembre 1690, 6 garçons et 7 filles âgés de moins d'un an vivaient encore dans le village. Mais comme ces derniers nombres sont trop petits pour en tirer une règle générale, j'ai considéré simultanément les années successives, pour obtenir des nombres plus élevés. J'ai ajouté les nombres des enfants nés pendant plusieurs années, garçons et filles séparément. En ajoutant de même les nombres des garçons ou des filles décédés en ces années et en les retranchant des nombres correspondants des naissances, j'ai trouvé les nombres du texte.

si sur 916 filles il en meurt 239 la première année, il doit en mourir 180 sur 691; il en reste donc 511. En y ajoutant les 489 garçons que je viens de mentionner, on trouve que dans la ville considérée il doit vivre 1000 enfants de 0 à 1 an, ce qui s'accorde parfaitement avec la table de HALLEY.

Reprenons le calcul: sur 850 garçons il en meurt 382 avant d'avoir atteint l'âge de 2 ans; sur 734 il doit donc en mourir 330. Sur 822 filles il en meurt 295 avant d'avoir atteint le même âge; sur 691 il en meurt donc 248. Le nombre total de ces enfants morts est de 578; j'en retranche 8 à cause de ceux qui meurent pendant la troisième année à un âge de 1 à 2 ans; il reste alors 855 enfants vivants, âgés de 1 à 2 ans, ce qui s'accorde derechef avec la table de HALLEY. Cette table est donc bien construite d'après les nombres des décès; la principale objection qu'on y peut faire c'est qu'elle est basée sur un nombre de 1425 naissances au lieu du nombre 1238 donné par M. HALLEY. Et même si l'on conserve le nombre de 34000 habitants, le rapport du nombre des habitants au nombre annuel des enfants nés vivants est encore inférieur à 24 : 1.

Les 855 entants âgés de 0 à 2 ans sont précisément les $\frac{3}{5}$ des 1425 enfants nés. Il s'ensuit que $\frac{2}{5}$ de ces enfants sont décédés; ce résultat s'accorde avec celui obtenu précédemment d'après les régistres mortuaires de Londres.

Ce qui précède nous conduit à poser le problème suivant.

Etant donné le nombre d'enfants qui naissent vivants chaque année en une localité de la Hollande, calculer le nombre des garçons et des filles âgés de moins de dix ans qui habitent simultanément cette localité.

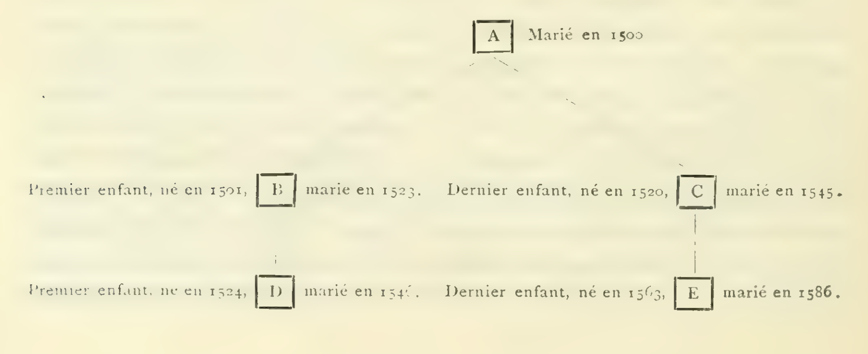
Dans les villages suivants: Grosthuizen, Avenhorn, Scharwoud, Oosthuizen, Kwadijk, Warder, Jisp, Wormer, Krommenie, Wormerveer, Koog, Westzaanen, Oostzaandam, Oostzaanen, Purmerland, Ilpendam, Landsmeer, Zunderdorp, Nieuwendam, Uitdam, Hem, Wijdenes, Oosterblokker, Westerblokker, Zwaag, Opperdoes, Twisk, Westgraftdijk, Oostwoude et Critsum, on a compté en tout 2783 garçons et 3161 filles âgés de moins de 10 ans. Le nombre des enfants nés vivants dans ces villages a été de 11877 pendant 10 ans; toutefois parmi ce nombre sont compris quelques enfants provenant de la contrée des lacs et baptisés dans ces villages;

j'admets que ces enfants qui ne font pas partie des enfants habitant les villages, sont chaque année au nombre de 40; cela fait donc 400 en 10 ans. En déduisant ce nombre de 11877, je trouve un reste de 11477 enfants. Je ne possède que quelques notes éparses indiquant séparément les nombres des garçons et des filles. La conclusion générale qu'on en peut tirer, c'est que 25 garçons naissant vivants contre 24 filles. Cela semble s'écarter un peu de l'ordre universel; mais cet écart n'est dû probablement qu'à la petitesse des nombres d'années. Si l'on adopte le rapport trouvé, on peut calculer que les 11477 enfants se composaient de 5856 garçons et de 5621 filles. Si je dis alors, en me basant sur la statistique du village Broek; de 40 garçons nés vivants il en reste encore 19 après 10 ans; combien restera-t-il de 5856 garçons? la réponse est: 2782 garçons. On sait de même que de 16 filles nées vivantes il en reste 9 après 10 ans. Il en résulte que de 5621 filles il doit en rester 3162, ce qui s'accorde fort bien avec le résultat du dénombrement effectué dans les villages nommés.

Septième Chapitre.

Des générations.

La reproduction du genre humain, de père en fils, de fils en petit-fils, etc., donne lieu à l'existence de diverses „générations". On compte une génération du père à l'enfant, deux générations du père à l'enfant de l'enfant; mais le nombre d'années qui sépare une génération d'une autre est loin d'être constant. Si l'on calcule ce nombre d'après les premiers enfants issus de chaque mariage, il sera beaucoup plus petit que si on le calcule d'après les derniers. C'est ce qu'on voit aisément d'après le tableau des générations que voici.



Chaque génération des enfants premiers-nés est ici de 23 ans, des derniers enfants de 43 ans. Comme les tables généalogiques n'indiquent pas toujours l'époque de la naissance des enfants, je calculerai dans la suite la durée des générations d'après les mariages. La génération des enfants premiers-nés s'accorde le mieux avec celle des princes règnants, attendu que généralement le fils aîné (ou, en certains pays, s'il n'y a pas de progéniture mâle, la fille aînée) succède au trone. Autrefois les années ont eu des longueurs diverses dans différents pays, comme on le voit par les écrits de plusieurs auteurs. C'est pour éviter la confusion qui en résulterait, paraît-il, que les anciens ont préfére le système des générations. HÉRODOTE 1) dit que 3 générations équivalent à 100 années (l'année était alors de $365\frac{1}{4}$ jours); on doit avoir pris la moyenne d'un grand nombre de générations pour obtenir une valeur déterminée de la durée d'une génération. Le célèbre NEWTON admet aussi que chaque génération, si l'on prend la moyenne, a une durée de 33 ou 34 ans, de sorte qu'on peut prendre 100 années pour 3 générations 2); mais si l'on ne tient compte que des enfants premiers-nés, la durée des générations est plus courte: en ce cas trois générations ne font que 75 ou 80 années. La durée moyenne du règne d'un roi ou d'un prince est encore plus courte, parce que les frères se succèdent parfois, et qu'ils sont quelquefois détrônés ou tués. Si je prends la moyenne de 23 et de 43 ans, période pendant laquelle les hommes sont dans la meilleure condition et où les femmes donnent naissance au plus grand nombre d'enfants, je trouve 33 années; c'est là le temps moyen d'une génération évalué grossièrement. Pour voir comment ceci s'accorde avec l'expérience du temps présent j'ai tiré de deux listes de MORERI 3) 50 générations de familles françaises pour la plupart. Je n'ai pas choisi des générations d'enfants premiers-nés ou derniers-nés, je les ai prises au hasard; j'ai eu soin toutefois de ne prendre que des personnes dont la date du mariage est indiquée. J'ai trouvé ce qui suit.

1) Livre 2.

2) Chronol. des Grecs, p. 56, Paris, 1728.

3) Dans l'édition d'Amsterdam, 1702.

	Année	Génér.		Année	Années
Gaill. de Durfort III, S. de Du	1390	8	Jac. Henry, Duc de Duras	1689, le 7 Mars.	299
Fred. IV, Duc d'Autriche	1453	3	Ferdin. I, emper. d'Allemagne	1521	68
Charles II d'Autriche	1570	4	Josèphe, „ „	1699, le 15 Janv.	129
Julien de Beau-poil	1443	8	Louis de Beau-poil	1703	260
Louis II, Duc de Bourbon	1371, le 19 Août	10	Louis, Dauphin français	1697, le 7 Déc.	326
Jerome de Bragelonge	1565	3	Pierre de Bragelonge	1687, le 29 Déc.	122
Jean II de Briqueville	1534, le 15 Juin.	5	Franc IV de Briqueville	1691, le 3 Déc.	158
Engueran II, S. de Coucy	1132	8	Isabeau de Coucy	1409	277
Jean de Courtenay de Chevill.	1513	5	Charl. Roger. P. de Courten.	1704, le 19 Nov.	191
Guillaume de la Croix	1476	7	Jos. Franç, de la Croix	1693, le 20 Mai.	217
		61 générations en tout			2047 années

	Année	Génér.		Année	Années
Jean I, Comte de Dreux	1240, Avril	7	Franc. de Dreux	1509	269
Gaillard III de Durfort	1390	9	Jean Henry, M. de Durfort.	1709, le 22 Mai.	319
Gilbert III, S. de la Fayette.	1481, le 11 Juillet	6	Franc. Comte de la Fayette.	1655	174
Jean le Ferre	1551	4	Louis Urb. le Ferre	1680, le 9 Juin.	129
Lancelot Frezeau	1403, le 21 Nov.	7	Isac Frezeau	1615	212
Michel, S. de Froullay	1371	9	René, M. de Froullay	1706, le 13 Avril	335
Hugues de Gallard	1268	8	Jean de Gallard	1553	265
Charles I de Gancourt	1454, le 8 Oct.	4	Charles V de Gancourt	1604, le 29 Sept.	150
Jean de Pardillan	1487	8	Louis, Marq. de Gendrin	1707	220
Jean Richard II	1445, le 29 Juin.	7	Armand de Gourdon	1710, Sept,	265
		69 générations en tout			2338 années

	Année	Génér.		Année	Années
Albert, Comte de Hohenlo	1410	7	Jean Fréd. Cte. de Hohenlo	1665	255
Charles de Hohenzoll	1537	4	Fréd. Guill. de Hohenzoll	1687, le 22 Janv.	150
Gilles V de Mailly	1345	11	René VI de Mailly	1689	344
Jean Marc. de Montault	1527, le 16 Mai.	4	Philippe de Montault	1651, Févr	124
Guil. Louis, Cte. de Nassau.	1615	2	Fr. Louis de Nass. Sarb.	1678	63
Nicolas I, S. de Nettancourt.	1502	5	Louis Claude, de Nettanc.	1680	178
Charles de Bettencourt	1630	2	Charles Ignatius	1705	75
Nicolas de Neufville	1511	6	Louis Nic. de Neufville	1694, le 20 Avril	183
Louis Philypeaux	1537, le 21 Août.	4	Ant. Franc. Philypeaux	1696	157
Ran. Helie de Pompadour	1355	9	Jean III de Pompadour	1640	285
		54 générations en tout			1814 années

	Année	Génér.		Année	Années
Alfons I, roi de Portugal	1146	17	Jean Franc. Roi de Portugal.	1708, le 9 Juillet	562
Jean II de Tournehu	1377	10	Pierre de Tournehu	1680	303
Antoine I de Saintnectaire.	1472 le 24 Avril	5	Henri Senectere	1675, le 18 Mars	203
Simon, Ste. de Sarbruk	1265	7	Robert de Sarbruk	1487	222
Claude Servien I	1447	4	Antoine Servien	1582, le 2 Juin.	135
Franc. Sforce	1441	7	Franc. Marie Sforce	1696, le 13 Juin.	255
Maria de Silly	1473 le 25 Sept.	2	Anne de Silly	1527	54
Bertrand de Souillac	1565	3	Jaq. Louis de Souillac	1666, Nov.	101
Macé de Souvré	1474 le 26 Juin.	6	Anne de Souvré	1662, le 19 Mars	188
Guill. V de la Baume	1524 le 19 Sept.	3	Anne de la Baume	1631, le 8 Mars.	107
		64 générations en tout			2130 années

	Année	Génér.		Année	Années
Jean III, de Hostun	1444, le 7 Janvier	8	Charlotte Louise de Hostun.	1704, le 1 Févr.	260
Thierr. d'Espagne	1490, le 9 Juillet	4	Jean de Thierrat	1652, le 25 Avril	162
Georg. de Tremoulli	1425, le 2 Juillet	10	Charles Louis de Bretagne	1706, le 12 Avril	281
Jean III, de Rieux	1374, le 16 Févr.	8	Jean Gustave de Rieux	1677, le 2 Mars.	303
Louis de Tournielle	1537	5	Anne Joseph de Tournielle.	1700	163
Flotard de Turenne	1337	11	Jean Paul de Turenne	1698	361
Bertrand de Yalbelle	1189	13	Cosme II, de Valbelle	1606	417
Hugo de Vergy	1175	9	Jean de Vergy IV	1457	282
Philippe de Vienne II	1245	12	Henry de Vienne	1655, le 22 Mai.	410
Savary III de Vivonne	1323	3	Renault de Vivonne	1431	108
		83 générations en tout			2747 années

Le nombre total des générations est de 331. La somme de tous les nombres d'années est de 11076; chaque génération a par conséquent une durée de 33 ans et $5\frac{1}{2}$ mois en moyenne, résultat conforme à la thèse d'HÉRODOTE.

J'ai examiné la même question pour ma ville natale, Amsterdam. Feu M. HARMEN BEREWOUT, secrétaire de cette ville, s'est donné beaucoup de peine pour arriver à la connaissance des généalogies des principales familles habitant différentes villes de la Hollande et il m'a communiqué la liste suivante ayant rapport à la ville d'Amsterdam. La date qu'on trouve indiquée pour chaque personne est celle de son mariage; toutefois la liste comprend quelques noms de personnes pour lesquelles on a indiqué le mois et non le jour; dans ces cas on a déterminé le temps du mariage d'après celui où ces personnes se sont présentées aux commissaires. En général, à moins de circonstances imprévues, le mariage a lieu 17 à 19 ou 20 jours après la déclaration officielle. On aurait pu trouver la date exacte de chaque mariage, mais à cet effet il eut fallu chercher dans d'autres livres encore. Chaque personne dont le nom est écrit à gauche a été le bisaïeul de celle qui se trouve à droite sur la même ligne. La dernière colonne donne le nombre d'années qui se sont écoulées depuis le premier mariage jusqu'au quatrième: c'est là le temps que je considère comme celui de trois générations. J'aurais pu obtenir plus de trois générations pous diverses familles; mais on avait cru que je n'en demandais que trois. D'ailleurs il était plus facile de s'en tenir là, parce qu'autrement celui qui copiait les dates aurait dû chercher dans d'autres livres encore. J'ai placé les noms de famille dans l'ordre alphabétique. La lettre O placée chez un nom d'homme indique que celui-ci a été officier supérieur à Amsterdam; placée chez un nom de femme, que son mari occupait ce poste. De la même manière la lettre B veut dire bourgmestre, E échevin, C conseiller. Je n'ai pas fait de distinction entre les descendants des premiers ou des derniers enfants, attendu que je ne cherchais que la durée moyenne du temps qui s'écoule entre deux mariages successifs. Je serai suivre maintenant la liste qu'on m'a donnée.

	Année		Année	Années	Mois
Abraham Alewijn	1630, le 10 Déc.	Jacques Alewijn, E. et C.	1740, le 26 Avril	109 :	5
Corneille Jorissen, E. et C.	1588, le 25 Déc.	Jean Backer, O., E. et C.	1687, le 7 Janv.	98 .	
Jean Berewout	1641, le 14 Mai.	Frédéric Berewout, E. et C.	1717, le 24 Oct..	76 :	5
Frédéric Berewout	1665, le 7 Juillet	Marie Cath. Berewout	1748, le 9 Avril.	82 :	9
Jacques Bicker, C.	1608, le 29 Juin.	Henri Bicker, B.	1714, le 24 Avril	105 .	10
Corneille Bicker, B.	1617, le 22 Août	Gér. Bicker van Swieten, C.	1708, le 9 Déc..	91 :	4
Guillaume Boreel	1626, le 22 Sept.	Jacques Boreel, E.	1735, le 28 Févr.	108 :	5
Jacques Bors	1627, Sept.	Gér. Bors van Wav. E. et C.	1715, le 14 Avril	87 :	7
Gér. Bors van Wav. B. et C.	1654, le 11 Févr..	Jacoba Henr. Bors v. Wav.	1746, le 17 Juin.	92 :	5
Pierre Boudaan Courten	1618, le 15 Juillet.	Gualt. Boud. Courten E. et C.	1730. le 18 Avril	111 :	9
Paul Buys	1650, le 14 Oct..	Agathe Sophie Buis	1746, le 20 Sept.	95 :	11
George Cliffort	1648, le 10 Nov.	Pierre Cliffort, E.	1738, le 18 Juillet	89 :	8
Caspar van Collen	1594, le 23 Août	Ferdinand van Collen, B.	1704, le 27 Mai.	109 :	9
Balthasar Coeymans	1588, le 27 Juillet	Jean Coeymans, E. et C.	1723, le 1 Août.	135 :	
Caspar Commelin	1661, le 29 Nov.	Jacoba Commelin	1746, le 8 Févr..	84 :	2
Dirk Corver	1621, Juillet	Gérard Corver, B.	1714, le 22 Avril	92 :	9
Pierre de la Court	1616	Pierre de la Court, E. et C.	1726, le 4 Janv..	109 :	11
Adr. Reyn. Cromh. B. et C.	1536	Jacques Cromhout	1635	99 :	
Reynhard Deuts	1641	Daniel Deutz, E. et C.	1744, le 8 Déc...	103 :	6
Henri van Dortmund	1554	Bonavent. van Dortmund	1660, Oct.	106 :	3
Bruno van der Dussen	1614	Jacques van der Dussen	1713, le 22 Oct..	99 :	4
Abraham l'Estevenon	1628, le 3 Avril.	Matthée l'Estevenon	1741, le 21 Avril	113 :	1
Corneille Geelvink, B. et C.	1643, le 29 Sept.	Nicolas Geelvink, B. et C.	1729, le 20 Sept.	86 :	
Pierre van Ghezel	1634, le 12 Déc.	Harmen van Ghezel, E. et C.	1726, le 31 Déc.	92 :	
Corneille Graafland	1616, le 28 Août	Corneille Graafland, E.	1710, le 5 Oct...	94 :	1
Jean ten Grotenhuis, E. et C.	1615, Nov.	Anne Cath. ten Grotenhuis	1687, le 7 Jan...	71 :	2
Engelbertus Graswinkel	1606	Jean Graswinkel	1721, le 26 Oct..	115 :	0
Nic. van Harencarspel, E. et C.	1595, Août	Franç. van Harencarspel	1712, le 11 Mai.	116 :	9
Gerrit Hasselaar	1618, le 22 Janv.	Agnès Hasselaar, E.	1685, le 26 Avril	67 :	3
Nicolas Hasselaar	1619, le 29 Déc.	Gér. Arnoud Hasselaar, B.	1728, Août	108 :	8
Jean van Heemskerk, E.	1640, le 10 Avril	Guillaume van Heemskerk, E.	1744, le 6 Oct...	104 :	6
Isaac van Heuvel	1593, le 22 Août	Duifje van Heuvel	1688, le 6 Janv..	94 :	4
Guillaume Pietersz. Hooft	1578, Nov.	Gerrit Hooft, B. et C.	1673	94 :	7
Henri Hooft	1611, le 26 Juin.	Gerrit Hooft, E. et C.	1707, le 28 Juillet	96 :	1
Jacques Hop	1610, Nov.	Corneille Hop, E. et C.	1726, le 28 Mai.	115 :	6
Henri Hudde	1582, Sept.	Anne Marie Hudde	1668, le 26 Sept.	86 :	
Jean Huidekoper, B. et C.	1624, le 9 Juillet	Jean Huidekooper, B. et C.	1721, le 9 Juillet	97 :	
Pierre Hulft	1597, Juin.	Jean Hulft, E.	1713, le 4 Sept..	116 :	4
Nicolas Kalkoen	1634, le 19 Sept.	Pierre Kalkoen, E.	1738, le 25 Nov.	104 :	2
Guillaume van Loon	1561	Guillaume van Loon, B.	1663	102 :	
Hans van Loon	1597, le 27 Mai.	Adrien van Loon, E.	1712, le 26 Nov.	115 .	6
Nicolas van Loon	1624, le 26 Mai.	Jacques van Loon	1746, le 17 Juin.	122 :	1
Benjamin van der Meer	1642, le 6 Mai..	Jérémie van der Meer, E.	1738, le 23 Sept.	96 :	5
Pierre van der Merkt	1615, le 21 Oct..	Albert van der Merkt, E.	1721, le 2 Mars.	105 :	4
Jean Munter	1596, Juin.	Guillaume Munter, B.	1721, le 12 Mai.	115 :	11
Pierre Muissart	1645, le 8 Août.	Guillaume Muissart	1742, le 4 Mars.	96 :	7
Fr. Oetgens van Wavere, B.	1582	Anth. Oetg. v. Wavere, E.	1695, le 17 Mars	112 :	9
Therry d'Orville	1572, le 21 Janv.	Fréd. Phil. d'Orville	1705, le 24 Mars	133 :	2
Claas Pancras	1587, le 27 Déc..	Gerbrand Pancras, B. et C.	1696, le 28 Févr.	108 :	2
Marten van Papenbroek	1631, Sept.	Cathérine van Papenbroek	1718, le 27 Mars	86 :	6
Andrée Pels	1620, Juin.	Guillaume Pels	1730, le 19 Févr.	109 :	8
Gijsbert van de Poll	1556, le 31 Mai.	Rébecque van de Poll	1665, le 7 Juillet	109 :	1
Pierre Reaal, E.	1604, Juin.	Sophie Reaal	1709, le 24 Mars	104 :	9
Jacques Reepmaker	1593, le 26 Janv.	Ernst Reepmaker	1688, le 6 Janv..	94 :	11
Jacques Reepmaker	1627, le 14 Sept.	Susanne Reepmaker	1710, le 5 Oct...	83 :	1
Joachim Rendorp, E. et C.	1646, le 10 Févr.	Pierre Rendorp, B. et C.	1727, le 15 Avril	81 :	2
Samuël Sautin	1626, le 4 Oct...	Elisabeth Sautin, E.	1714, le 1 Juin..	107 :	8

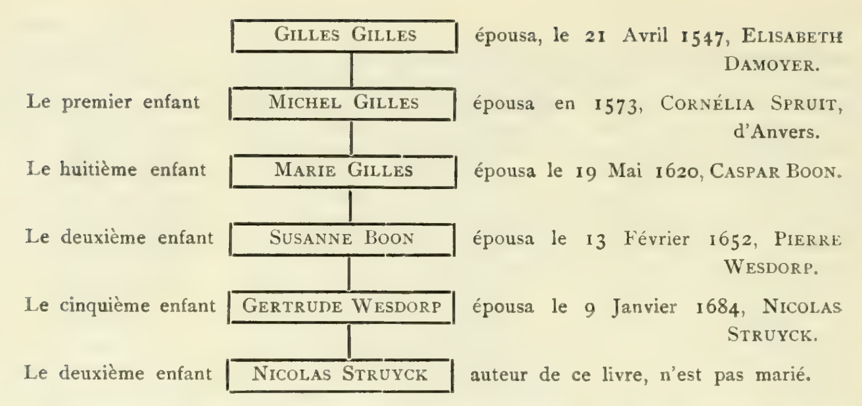
	Année		Année	Années	Mois
Hillebrand Schellinger...........	1615, le 1 Oct...	Elias Schellinger, E. et C.......	1744, le 14 Avril	128	6
Jean Slicher......................	1625, le 3 Juin..	Cather. Elisabeth Slicher.........	1711, Mais......	85	9
Joost de Smeth..................	1621, le 8 Août.	Théodore de Smeth.............	1738, le 25 Févr.	110	7
Wouter van der Spelt...........	1618, le 1 Juillet	Henri van der Spelt, E..........	1713, le 26 Nov.	95	5
Quiryn van Streyen.............	1610, le 17 Janv.	Jacques van Streyen, E. et C....	1715, le 14 Avril	105	3
Jean Six..........................	1606...........	Pierre Six, B......................	1716, le 5 Juillet	110	
Christian Tiewelen..............	1625, le 6 Mai..	Susanne Tiewelen...............	1716, le 28 Avril	91	
Jacques Trip.....................	1663, le 20 Févr.	Lucas Dirk Trip..................	1746, Mai.......	83	3
Pierre Tulp.......................	1585, le 29 Oct..	Elisabeth Tulp....................	1694, le 10 Août	108	10
Gilles Valkenier..................	1576, le 20 Févr.	Jacoba Valkenier, B.............	1681, le 20 Juin.	105	4
Wouter Valkenier, B. et C.......	1619, le 11 Juin.	Gilles Valkenier, E.............	1709, le 20 Mai.	89	11
Gilles Valkenier, B. et C........	1648...........	Gilles Valkenier..................	1746, le 8 Févr..	97	5
François de Vroede..............	1600, le 16 Mai.	Elisabeth de Vroede, E. et C....	1701, le 18 Janv.	100	8
Paul de Wilhem..................	1614, le 26 Août	David de Wilhem, E............	1728, le 2 Mars.	113	6
Pierre de Wit.....................	1625, le 2 Nov..	Jean de Wit, E. et C............	1701, le 18 Janv.	75	2
Jerôme de Wit....................	1649, le 3 Nov..	François de Wit, E. et C........	1743, le 2 Mai..	93	6
Corneille Witsen, O. et B........	1634, le 21 Nov.	Jonas Witzen, E..................	1731, le 24 Juillet	96	8
Jean Wolters......................	1647, le 27 Août	Cornélia Jacoba Wolters.........	1746, le 22 Nov.	99	3

En ajoutant tous les nombres de la dernière colonne, on trouve 7542 années et 11 mois. Ce nombre d'années équivant à 225 intervalles d'un mariage au suivant; de sorte qu'en moyenne cet intervalle qui correspond à-peu-près à une génération, est d'un peu plus de 33 ans et 6 mois. J'ignore si ce nombre resterait le même ou bien s'il serait encore changé quelque peu si l'on avait pris la peine de chercher la longueur de l'intervalle de deux mariages pour un bien plus grand nombre de personnes; je ne sais pas non plus si l'on trouverait une même moyenne pour les personnes de toute condition vivant à Amsterdam.

J'ajouterai encore quelques dates tirées de ma propre généalogie. Du côté de mon père je trouve les dates 1482 et 1575 1). Mais comme quelques papiers ayant rapport à l'intervalle entre ces deux dates sont perdus, je me contenterai de donner ici la liste de mes ancêtres du côté de ma mère, GERTRUDE WESDORP.

---

1) Annales Rer. in Holl. & Diœc: Ultraj. gest., 1482, In Veteris Aevi Analect. A. Matth. Tome I, p. 451, Hag. Com. 1738. Consultez aussi Johan à Leydis de Orig. & Reb. gest. D. D. de Bred. p. 723 du même livre. COMMELIN, „Description d'Amsterdam", première partie p. 495, „Le Luthéranisme en Europe" par A. PAAUW, p. 325, Amsterdam, 1743, etc.



Les quatre premières générations ont en moyenne une durée de 34 ans. Mais dans les Indes orientales et occidentales et dans d'autres pays du zône torride, les indigènes se marient en général beaucoup plus tôt que chez nous et ont donc plus tôt des enfants. D'autre part les femmes n'y restent pas fécondes aussi longtemps que chez nous, et l'opinion générale a été jusqu'à présent que les hommes n'y atteignent généralement pas un âge aussi avancé que dans ces pays-ci. Il est donc possible que les générations y aient une durée inférieure à $33\frac{1}{3}$ ans; mais nous ne disposons pas de statistiques nous permettant d'affirmer qu'il en est ainsi.

Dans la 4ième dissertation du Père SOUCIET contre I. NEWTON, on trouve 1) les paroles suivantes qui s'appliquent à Newton: ,,Il met de la différence entre règne et génération, et prétend que selon le cours de la Nature un règne doit bien moins durer qu'une génération. Mais les royaumes dont il s'agit étant héréditaires, on ne voit pas trop, pourquoi, ni comment, ces règnes diffèrent d'une génération, selon le cours de la Nature. La Nature n'était-elle pas la même pour les rois que pour les particuliers et surtout pour les anciens rois dont il s'agit?" Mais cette remarque est dénuée de fondement: NEWTON raisonne beaucoup mieux que SOUCIET, comme on le voit par ce qui précède. J'ai trouvé dans le livre même de SOUCIET que 199 rois et princes ont régné d'après ses propres calculs durant 4626 ans en tout 2), la durée de chaque règne a donc été de 23 ans en moyenne, nombre qui diffère beaucoup de la durée moyenne d'une génération.

1) Edition de Paris, 1726, p. 105.

2) Quatrième Dissert., p. 110 et 111.

Il me semble que la durée du délai de prescription dont on parle en droit et dont GROTIUS, dans le troisième livre de son „Introduction à la jurisprudence hollandaise", écrit ce qui suit: „Ce délai de prescription a généralement chez nous la durée d'un tiers de siècle" 1), — il me semble, dis je, que cette durée provient de celle d'une génération. Dans les chartes où il est question d'un délai de prescription d'un tiers de 100 ans, c'est aux immeubles que ce délai s'applique.

Huitième Chapitre.

Des années meurtrières périodiques appelées „Anni climacterici".

Je n'aurais pas fait mention de ces années de forte mortalité, attendu qu'on peut supposer que les gens sensés n'ajoutent plus foi à des thèses si peu fondées, si je n'avais trouvé deux raisons pour ne pas les passer sous silence: d'abord, il faut veiller à ce que la superstition ne s'introduise de nouveau, et en second lieu, j'ai ainsi l'occasion de montrer la défectuosité des régistres mortuaires de Vienne et de Breslau. C'est une chose connue qu'autrefois beaucoup de gens pensaient que si l'on considère dans la vie humaine la 7ième, la 14ième, la 21ième année et ainsi de suite d'après la même période de 7 années, plus de gens meurent en ces années-là que dans celles qui les précèdent ou qui les suivent: mais que parmi elles la 49ième et la 63ième années sont surtout celles où la mortalité est forte. M. SUSZMILCH, ainsi que M. KUNDMAN, estiment à bon droit, que les régistres mortuaires de Vienne et de Breslau détruisent l'hypothèse de ces années de forte mortalité. Le premier auteur raconte que l'empereur MAXIMILIEN II, ayant achevé sa 63ième année, avait répondu lorsqu'on le félicitait d'avoir dépassé cette année meurtrière 2), que pour lui (comme il était maladif) chaque année suivante était une année meurtrière. Mais M. SUSZMILCH s'est trompé car cet empereur est né en 1527, le 1 Août, et il est décédé le 12 Octobre de l'année 1576 3); il doit donc avoir fait cette réponse environ 2 mois avant sa mort, vu qu'il est décédé à l'âge de 49 ans, de 2 mois et de 11 jours.

1) GORIS, Advers. Miscell. Ch. 9.

2) „Die Gottliche Ordnung", p. 203.

3 EMANUEL VAN METEREN, Col. 110 et 111. Amsterdam. 1652, et d'autres auteurs.

Ce ne peut pas être MAXIMILIEN I dont l'auteur entend parler, car ce monarque n'a vécu que 59 années, 9 mois, 19 jours, 21 heures et 4 minutes 1). Ce qui m'étonne le plus, c'est que M. SUSZMILCH indique une autre série d'années meurtrières: ces années seraient les multiples de dix depuis l'âge de 30 jusqu'à l'âge de 80 ans. Cette opinion est fondée sur les régistres mortuaires dont nous avons parlé plus haut. Après les avoir examinés, l'auteur parle de la sorte: „La chose semble être vraie, quoique je ne puisse donner la moindre raison pour laquelle une année de ce genre doive se présenter tous les dix ans. Il y avait quelque probabilité naturelle pour la septième année, mais ici toute probabilité est absente." 2) L'auteur fait remarquer ensuite qu'on est également incapable en physique de donner une raison de l'existence de la force magnétique ou de l'électricité, et qu'elles ont néanmoins une existence réelle. Je ne puis pas comprendre comment on ose déduire une proposition de prémisses si faibles. Mon opinion est que la grande inégalité en question consistant dans le fait qu'aux âges divisibles par 10 un nombre bien plus grand de personnes semblent mourir, provient du peu d'exactitude avec lequel on a coutume d'indiquer les âges et qu'on ne doit point y chercher d'autre secret. Car ceux qui indiquent l'âge d'un décédé et qui ne connaissent parfois pas l'âge exact, se contentent d'indiquer le nombre rond qui en diffère le moins. Par exemple, on donnera l'âge de 50 ans à ceux qui en avaient 49,51 ou 52, jugeant la différence négligeable; celui de 60 ans à ceux qui ont un peu moins ou un peu plus de 60, et ainsi de suite. D'ailleurs on connaît rarement l'âge exact d'étrangers décédés, de mendiants ou de personnes peu connues qui perdent la vie par un accident imprévu. Beaucoup de gens ne connaissent pas même exactement leur propre âge; comment d'autres pourront-ils donc l'indiquer exactement après leur mort? et combien peu probable est-il qu'ils voudront se donner la peine d'examiner la chose sérieusement! Pour voir comment M. SUSZMILCH est arrivé à cette étrange opinion, j'ai fait les extraits suivants des régistres mortuaires de Breslau et de Vienne; chacun d'eux est relatif à quatre ans.

---

1) Chron. ALBERTI. Duc. Austr. Col. 383. Lips 1725.

2) „Die Gottliche Ordnung", p. 203.

Breslau.						Vienne.					
Age	Décès	Age	Décès	Age	Décès	Age	Décès	Age	Décès	Age	Décès
9	49	10	23	11	12	9	122	10	135	11	22
19	8	20	12	21	9	19	94	20	158	21	85
29	16	30	42	31	13	29	121	30	311	31	128
39	15	40	47	41	23	39	155	40	437	41	99
49	24	50	64	51	28	49	152	50	421	51	109
59	21	60	57	61	32	59	99	60	403	61	88
69	20	70	53	71	28	69	117	70	326	71	54
79	18	80	18	81	3	79	81	80	183	81	33
	171		316		148		941		2374		618

Il faut entendre ces chiffres de la manière suivante. Le premier nombre est l'âge de 9 ans; à-côté de ce nombre se trouve écrit le chiffre de 49 décès; cela veut dire qu'en quatre ans 49 enfants sont morts à Breslau à un âge entre 9 et 10 ans. Le nombre 10, écrit à-côté et suivi du nombre 23, indique que pendant ce temps 23 enfants sont morts à un âge entre 10 et 11 ans. De même il y a eu 12 décès de 11 à 12 ans, etc. Pour examiner si l'inégalité indiquée par ces régistres existe réellement dans la nature, j'ai considéré un groupe de 3500 personnes dont je connaissais l'année, le mois et le jour du décès. De la moitié de ces personnes je connaissais aussi la date exacte, l'année, le mois et le jour, de la naissance; de l'autre moitié je ne connaissais que l'âge en années entières qu'elles avaient en commençant à recevoir leurs rentes viagères. J'attribue l'âge de $6\frac{1}{2}$ ans à celles qui sont indiquées comme ayant l'âge de 6 ans, et ainsi pour toutes les autres, car quoique l'une puisse avoir dépassé quelque peu la demie année, une autre peut ne pas encore l'avoir achevée. J'ai fait un extrait suivant les âges des personnes décédées sans en omettre une seule, et voici ce que j'ai trouvé. Au commencement du tableau se trouve le chiffre 10 à côté du chiffre 19 indiquant un âge; cela veut dire que 10 personnes sont mortes âgées de 19 à 20 ans. Il en est de même pour tous les autres chiffres.

Age	Décès	Age	Décès	Age	Décès
19	10	20	19	21	22
29	23	30	25	31	21
39	29	40	31	41	25
49	33	50	25	51	40
59	39	60	39	61	39
	134		139		147

Comme dans ce tableau l'on ne voit aucune inégalité notable dans les nombres des décès et que le nombre des personnes mortes à un âge divisible par 10 n'est donc pas supérieur aux autres nombres, il s'ensuit à mon avis, sans qu'il soit besoin d'autres statistiques, que la nouvelle série d'années meurtrières périodiques est également inadmissible.

Je tâcherai en même temps de détruire encore une autre sorte de superstition. On trouve quelques personnes qui n'osent pas manger à une table où il y a 13 personnes, de peur de mourir endéans une année, quand même les 13 personnes seraient dans toute la force de l'âge. Le tableau suivant tiré de celui du docteur HALLEY fait voir clairement combien cette crainte est peu fondée. En prenant 1425 pour le nombre des enfants nés vivants, ou voit qu'il en meurt.

endéans une année	1 sur 100 entre l'âge de 10 et celui de 20 ans,
	1 „ 50 à l'âge de 40 ans,
	1 „ 25 „ „ „ 59 „
	1 „ 13 „ „ „ 70 „

SIXIÈME PARTIE.

Des rentes viagères, des tontines et des pensions pour veuves.

Premier Chapitre.

Des rentes viagères en Hollande.

Il est plus difficile qu'on ne le croirait tout d'abord de calculer pour tous les âges la valeur des rentes viagères telles qu'elles doivent être en moyenne lorsqu'on considère des nombres suffisamment grands. Quand même on connaîtrait l'âge d'un grand nombre de personnes assurées simultanément, que la vente des assurances serait entièrement terminée, et qu'on pourrait connaître la date exacte de tous les décès, on ne serait pas encore certain d'en pouvoir tirer une règle générale. En effet, si peu de temps après la vente il venait une période de peste ou de quelque autre maladie telle que la petite vérole, les fièvres, etc. qui font périr

beaucoup de gens, cela ferait dans la liste des décès un changement notable qui ne sera pas absolument le même que celui d'une autre liste. Celui qui veut donner une bonne règle à ceux qui vendent des assurances doit surtout avoir égard à prendre pour exemple des ventes telles que les premières années après la date d'une vente ont été des années saines, ce qu'on peut établir plus ou moins en consultant les régistres mortuaires. Les dernières années correspondant à chaque vente sont de moindre importance. Si l'on remarque une forte mortalité, il ne faut pas attribuer une trop courte durée à la vie humaine, afin que les mortalités extraordinaires soient à l'avantage de la société qui vend les assurances. Il me semble que la vie des hommes peut être examinée plus exactement d'après une statistique relative à de longues années successives, telle que celle de Broek-in-Waterland. La petite vérole, en sévissant parmi les jeunes enfants, ne peut conduire à des changements aussi considérables dans une statistique de ce genre que dans une statistique des personnes vivant à une même époque attendu que la petite vérole sévit rarement pendant plusieurs années consécutives.

Ce qu'on a su le moins bien déterminer dans les statistiques des rentes viagères, ce sont les nombres des enfants nouveau-nés et ceux des fort jeunes enfants. Les différents auteurs s'accordent à-peu-près sur les nombres des enfants âgés précisément de 5 ou de 10 ans; il ne faut pas s'en étonner, car ces nombres-là peuvent se tirer des livres des rentes viagères et les autres n'en peuvent pas être tirés. Pour donner une règle là-dessus, je n'ai pas encore trouvé de statistique préférable à celle de Broek. J'admets qu'une assurance prise pour un garçon âgé de 5 ans précis vaut 1832 florins; cette assurance lui donne tous les six mois une rente viagère nette de 40 florins; l'impôt a donc été payé. Pour une fille du même âge une assurance qui donne la même rente vaut 1928 florins, et la société qui vend les assurances donne ainsi tous les six mois un intérêt de $1\frac{1}{4}$ % 1).

Voici, après une légère correction résultant de l'inégalité des décès, les nombres des enfants des deux sexes nés vivants, de six mois en six mois, jusqu'à l'âge de 5 ans.

1) Consultez l',,Appendice aux Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine, p. 223.

	Garçons	Filles
Nouveau-nés	850	822
Après $\frac{1}{2}$ an	530	580
„ 1 „	497	548
„ $1\frac{1}{2}$ an	481	536
„ 2 ans	468	527
„ $2\frac{1}{2}$ ans	457	519
„ 3 „	448	512
„ $3\frac{1}{2}$ „	440	505
„ 4 „	432	499
„ $4\frac{1}{2}$ „	425	493
„ 5 „	419	488

Au bout de $4\frac{1}{2}$ ans la moitié des garçons étaient morts et seulement les $\frac{2}{5}$ des filles. Quant aux enfants nouveau-nés, j'admets ici qu'on est obligé d'assurer leurs vies s'ils naissent vivants sans qu'il fasse la moindre différence qu'ils aient l'air fort ou faible, sain ou malade. Le calcul se fait alors de la manière suivante. J'admets que l'assurance de chacun des 850 garçons nés vivants vaut x florins en argent comptant. La société reçoit donc 850 x florins et doit payer six mois plus tard la somme de fl. 21200 aux 530 garçons survivants. Parmi cette somme est compris l'intérêt de 850 x florins à un taux de $1\frac{1}{4}$ %, c. à. d. une somme de fl. 10,6 x. Le capital ne diminue donc que de 21200—10,6 x florins et au bout de six mois la société doit encore aux enfants la somme de 860,6 x—21200 florins. En continnant le calcul de la même manière on trouvera qu'au bout de 5 ans la société doit encore aux enfants un capital de 962,4 x—195061 florins. Cette somme doit être égale à la valeur des rentes viagères de 419 garçons âgés de 5 ans précisément. D'après l'hypothèse cette valeur est de fl. 767608, d'où il résulte que x = fl. 1000 est le prix d'une assurance prise pour un garçon nouveau-né. J'ai fait un calcul analogue pour tous les autres âges et j'ai trouvé ainsi les valeurs suivantes.

La troisième colonne donne, en argent comptant, la valeur

moyenne des assurances pour des nombres égaux de garçons et de filles; toutefois nous avons admis pour les nouveau-nés qu'il y a toujours 52 garçons contre 49 filles, et alors les fl. 1120 expriment la valeur des assurances achetées pour les enfants nouveau-nés en général.

	Assurances de garçons	Assurances de filles	Moyenne	Différence pour les deux sexes
Nouveau-nés	fl. 1000	fl. 1248	fl. 1120	fl. 247
Agés de $\frac{1}{2}$ an	,, 1584	,, 1753	,, 1668	,, 169
,, ,, 1 ,,	,, 1671	,, 1836	,, 1753	,, 165
,, ,, $1\frac{1}{2}$,,	,, 1708	,, 1861	,, 1784	,, 153
,, ,, 2 ans	,, 1739	,, 1876	,, 1807	,, 137
,, ,, $2\frac{1}{2}$,,	,, 1761	,, 1889	,, 1825	,, 128
,, ,, 3 ,,	,, 1779	,, 1899	,, 1839	,, 120
,, ,, $3\frac{1}{2}$,,	,, 1794	,, 1909	,, 1851	,, 115
,, ,, 4 ,,	,, 1810	,, 1915	,, 1862	,, 105
,, ,, $4\frac{1}{2}$,,	,, 1823	,, 1924	,, 1873	,, 101
,, ,, 5 ,,	,, 1832	,, 1928	,, 1880	,, 96

J'ai calculé, aussi exactement que j'ai pu, la valeur comptante nette d'une rente sémestrielle de 40 florins, en partant de la première statistique du village Broek,! celle où les décès ont été indiqués de mois en mois. La rente annuelle est la même qu'auparavant. Le calcul a été fait pour des garçons et des filles âgés précisément de 1 mois, de 2 mois, etc. jusqu'à 12 mois. La dernière colonne donne la valeur moyenne des assurances pour des nombres égaux de garçons et de filles.

Age en mois	Assurances de garçons	Assurances de filles	Moyenne
1	fl. 1215	fl. 1472	fl. 1343
2	,, 1338	,, 1569	,, 1453
3	,, 1431	,, 1644	,, 1537
4	,, 1525	,, 1685	,, 1605
5	,, 1563	,, 1721	,, 1642
6	,, 1584	,, 1753	,, 1668
7	,, 1599	,, 1767	,, 1683

Age en mois	Assurances de garçons	Assurances de filles	Moyenne
8	fl. 1614	fl. 1781	fl. 1697
9	,, 1629	,, 1795	,, 1712
10	,, 1643	,, 1809	,, 1726
11	,, 1657	,, 1823	,, 1740
12	,, 1671	,, 1836	,, 1754

Il me semble jusqu'à présent qu'il est le plus avantageux pour les acheteurs d'assurer des enfants âgés de 5 ans, savoir si l'on peut choisir l'âge et que la somme à payer est la même. J'ai tiré des livres des rentes viagères à Amsterdam, et de celui de la tontine de l'église luthérienne les noms de tous les garçons qui étaient âgés de 4, de 5 ou de 6 ans lorsqu'on assura leurs vies, et j'en ai trouvé un nombre de 97 ayant vécu en moyenne 43 ans après ce moment. De même un nombre de 82 filles du même âge ayant obtenu leurs rentes pendant 47 années en moyenne. Il s'ensuit que la durée moyenne du temps pendant lequel les garçons et les filles, en nombres égaux, tirent leurs rentes, est de 45 ans.

J'ajouterai encore ici une chose dont je ne suis pas absolument certain. Je ne le fais que pour permettre à d'autres personnes qui en ont l'occasion, de l'examiner plus en détail au sujet d'autres ventes d'assurances. Parmi plusieurs objections qu'on pourrait faire il y a celle-ci: n'est-il pas vrai que dans certaines familles les personnes vivent en moyenne plus longtemps que dans certaines autres familles? et n'assure-t-on pas souvent les vies des personnes appartenant aux premières, étant encouragé par la longévité qu'on a observé dans ces familles et dans l'espoir que les personnes qu'on désire assurer, vivront également longtemps? Je trouve que sur 183 personnes assurées en 1571 à l'église luthérienne d'Amsterdam, 21 vivaient encore en 1738, et que la plupart d'entre elles appartenaient à des familles de personnes macrobiennes par excellence. Voici une liste de quelques-unes d'entres elles; on y trouve derrière les noms des personnes assurées écrits dans la première colonne, l'âge de chaque personne à l'époque de l'assurance. La deuxième colonne donne les dates des décès de toutes ces personnes, excepté de celles qui vivaient encore le 15 Mars 1738 et que j'ai désignées par la lettre V. La lettre V de la troisième colonne indique que les personnes désignées par cette lettre vivaient encore le 15 Mars 1750.

	Age	Date du décès	Date du décès
Pierre van Loon.....	4	1717	
Emérence van Loon..	3	V	Le 20 Juin 1752
Nicolas van Loon....	1	V	le 12 Févr. 1752
Guillaume van Loon.	2	1727	
Alette van Bergen..	5	V	1739
François van Bergen	4	V	1750
Madeleine Baerts....	7	V	1747
Lucie Baerts.........	4	V	1748
Marie Bodt..........	16	1692	
Nicolas Bodt.........	15	V	1741
Henri Bodt..........	11	V	Mars 1739
Alida Bodt...........	8	1723	
Corneille Bodt......	1	V	Après le mois de Mars 1750
Marie Meiners.......	8	V	1740
Elisabeth Meiners...	6	V	V
Jacques van Riet.....	31	1722	
Anne Hedwig van Riet	4	V	V
Anne Hedwig de Meyer	6	1729	
Christian de Meyer..	4	1728	
Elisabeth de Meyer..	2	V	V

Parmi ces 20 personnes, sept seulement sont mortes entre 1671 et 1738, et en moyenne ces sept personnes décédées ont tiré leurs rentes pendant 49 ans à-peu-près. Les treize autres vivaient encore le 15 Mars 1738. — Parmi les 183 personnes assurées, il y avait 62 personnes appartenant à différentes familles et ayant chacune un nom de famille différent. A la dernière date il ne vivait plus que trois de ces personnes. Les 59 personnes décédées n'ont en moyenne tiré leurs rentes que durant 32 ans, les 62 personnes durant 34 ans; mais les autres 120 personnes parmi

lesquelles beaucoup appartenaient à une même famille, durant 40 ans en moyenne. La durée moyenne de la vie de toutes les personnes que l'église luthérienne a assurées, en prenant pour celles qui vivent encore la durée probable du reste de leurs vies, doit être de 50 ans à partir de la naissance.

Après le 15 Mars 1743, 17 des 183 personnes mentionnées vivaient encore, 2 années après encore 15, après le 15 Mars 1750 encore 10, ou plutôt 9, car on dit que CORNEILLE BODT est mort peu après le 15 Mars 1750, à l'âge de 80 ans. Parmi ces 9 il y avait trois hommes et six femmes. Les trois plus âgés des survivants avaient 85 ans, les deux plus jeunes 80 ans. Nous avons déjà fait mention de 5 d'entre ces personnes: ce sont les deux premières et les trois dernières mentionnées dans la dernière colonne du tableau précédent. Voici les noms des 4 autres et les dates des décès des 12 personnes qui restaient des 21 dont nous avons parlé à la page 388.

	N°.		Année	N°.		Année
	23	F	1739	77	M	1739 (Mars)
CATHÉRINE BRAND. V.....	24	M	1749	79	M	1750
ANNE ZOUTMAN. V........	39	F	1746	141	M	1745
JEAN ADRIEN KOOTWIJK. V.	40	F	1747	158	F	1744
JEAN VERHOEVEN. V.......	73	F	1747	168	M	1744
	76	M	1741	183	F	1741

JEAN VERHOEVEN est mort le 28 Juillet 1751.

Deuxième Chapitre.

Des rentes viagères en France.

Comme le taux de l'intérêt n'est pas égal partout, de même aussi les rentes qu'on reçoit après avoir assuré des personnes d'âges déterminés ne sont pas égales dans tous les pays. Cela ressort des détails de la vente d'assurances qui a eu lieu à Paris, au mois de Novembre de l'année 1744 1). On pouvait assurer les personnes ayant les âges indiqués dans les classes suivantes pour les prix écrits à-côté. Si l'on voulait par exemple procurer une

1) L'édit du roi a été imprimé à Paris, chez PIERRE GUILLAUME SIMON, imprimeur du parlement, Rue de la Harpe à l'Hercule.

rente annuelle de 1000 livres à un enfant âgé de 0 à 10 ans, on devait payer au comptant 13000 livres ; s'il s'agissait d'une personne de 10 à 20 ans, 12000 livres, etc.: il n'était pas permis de prendre pour une personne une rente annuelle inférieure à 50 livres.

Classe	Age	Livres payés	Taux de l'intérêt
1	de 0 à 10 ans	12000 au denier 13	$7\frac{9}{13}$ %
2	,, 10 ,, 20 ,,	18000 ,, ,, 12	$8\frac{1}{3}$,,
3	,, 20 ,, 30 ,,	70000 ,, ,, 11	$9\frac{1}{11}$,,
4	,, 30 ,, 40 ,,	160000 ,, ,, 10	10 ,,
5	,, 40 ,, 50 ,,	150000 ,, ,, 9	$11\frac{1}{9}$,,
6	,, 50 ,, 60 ,,	40000 ,, ,, $8\frac{1}{2}$	$11\frac{13}{17}$,,
7	,, 60 ,, 70 ,,	18000 ,, ,, 8	$12\frac{1}{2}$,,
8	70 ans et au-dessus	12000 ,, ,, 7	$14\frac{2}{7}$,,
		480000	

Autrefois, en comparant les rentes viagères calculées pour la ville d'Amsterdam avec celles qu'on avait déterminées d'après les régistres mortuaires de Breslau, j'avais cru pouvoir conclure que dans cette dernière ville les gens vivent généralement un peu plus longtemps qu'à Amsterdam 1). Attendu que depuis l'année 1672 il n'y a pas eu de mortalités extraordinaires à Amsterdam et que la différence avec les nombres de Breslau n'était pas grande et assez régulière, je soupçonnais aussi, en me basant sur les régistres mortuaires, qu'à Amsterdam parmi un même nombre de décédés il n'y a pas autant de personnes extrêmement âgées que dans certaines autres villes hors de nos provinces. Il m'était impossible alors d'aller plus loin. Les âges des personnes assurées à Amsterdam ne m'étaient connus qu'en nombres entiers d'années. J'ai appris depuis qu'en France on a établi plusieurs tontines 2). En 1746 il y en avait déjà neuf. M. DEPARCIEUX nous donne un

1) Hypothèses sur l'Etat de l'espèce humaine, p. 224.

2) Nous expliquerons plus loin ce qu'il faut entendre par une tontine.

aperçu de deux d'entre elles 1). La première fut établie au mois de Novembre de l'année 1689. Les âges étaient divisés en 14 classes: de 0 à 5 ans, de 5 à 10 ans, etc. jusqu'à 70 ans et au-dessus. Les cinq dernières classes avaient déjà disparu en 1742. Pour les deux dernières classes les données relatives à quelques années faisaient défaut: il était donc impossible de savoir les nombres des personnes appartenant à ces classes et décédées en ces années-là. On imprime tous les ans une liste des personnes décédées et des dates des décès. La deuxième tontine a été établie au mois de Février de l'année 1696. Les cinq dernières classes avaient également disparu en 1742. Je donnerai ici les détails de deux classes d'entre les 15 qui composaient la tontine, et je ferai voir combien parmi les personnes qui les composaient vivaient encore chaque année. Considérons d'abord la classe indiquée chez lui par k, dans le 7ième tableau: cette classe était composée de 292 personnes âgées de 50 à 55 ans; la dernière est morte en 1738.

292 Personnes âgées de 50 à 55 ans.

Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes
1	291	11	243	21	146	31	38	41	2
2	288	12	239	22	137	32	32	42	1
3	285	13	227	23	122	33	27	43	1
4	279	14	221	24	109	34	23	44	0
5	275	15	212	25	93	35	19		
6	268	16	202	26	76	36	14		
7	262	17	189	27	65	37	11		
8	258	18	171	28	57	38	7		
9	253	19	164	29	50	39	5		
10	248	20	155	30	44	40	4		

1) „Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine", Paris 1746, Tabl. 6 et 7.

210 Enfants âgés de 5 à 10 ans.

Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes	Années	Personnes
1	209	11	189	21	167	31	150	41	134
2	207	12	189	22	167	32	149	42	134
3	204	13	186	23	164	33	147	43	133
4	201	14	184	24	163	34	145	44	132
5	199	15	180	25	163	35	142	45	130
6	198	16	179	26	161	36	138		
7	196	17	178	27	158	37	137		
8	193	18	177	28	155	38	135		
9	191	19	173	29	152	39	135		
10	190	20	171	30	150	40	134		

J'ai tiré ces tableaux du 7ième tableau de M. DEPARCIEUX. Dans le premier l'on voit combien de personnes parmi les 292 personnes considérées vivaient encore chaque année. La dernière personne de cette classe est morte en 1738. Toutes ensemble elles ont tiré leurs rentes durant 5813 années; cela fait 20 années en moyenne pour chacune d'elles.

Notre deuxième tableau donne la deuxième classe du tableau de M. DEPARCIEUX. Cette classe se composait primitivement de 210 enfants âgés de 5 à 10 ans; après 45 ans, 130 de ces personnes vivaient encore. Si l'on cherche le nombre total des rentes obtenues, on trouve le chiffre 7469. Je dis alors: 292 personnes âgées de 50 à 55 ans ont obtenu 5813 années de rentes; combien 130 personnes du même âge en obtiendront-elles? On trouve le nombre 2588. En ajoutant ce nombre au nombre 7469 que nous venons de trouver, on obtient une somme de 10057. En divisant cette somme par 210, on trouve un quotient de 47 années et de $10\frac{1}{2}$ mois; c'est là le nombre moyen d'années pendant chacune de ces personnes a tiré sa rente annuelle. Or, j'ai trouvé d'après

les rentes viagères d'Amsterdam que les enfants, garçons et filles, âgés de 5 à 10 ans, n'ont tiré leurs rentes que durant $43\frac{1}{4}$ ans.

Toutes les personnes assurées à un âge inférieur à 20 ans, dans la deuxième tontine, ont reçu en moyenne leurs rentes durant $44\frac{3}{4}$ ans. Pour la ville d'Amsterdam je n'ai trouvé que 40 ans pour le nombre correspondant. Ne semble-t-il donc pas que les rentiers 1) vivent un peu plus longtemps en France qu'en Hollande et n'en serait-il pas de même pour les hommes en général? Ou y a-t-il d'autres raisons qui expliquent cette différence?

A l'aide des deux tableaux précédents, j'examinerai les rentes viagères de la classe des enfants âgés de 5 à 10 ans. J'admets que la société qui vend les assurances paye un intérêt annuel au denier 40, c. à. d. de $2\frac{1}{2}$ %, 2) et je commence par la classe à laquelle les personnes âgées de 50 à 55 ans ont pris part. Si nous partons de l'hypothèse que chaque personne recevra annuellement un florin, il faudra leur payer, au bout de la première année, fl. 291; en y ajoutant l'intérêt d'une année et encore fl. 288 qui doivent être payés aux autres rentiers à la fin de la deuxième année, on trouve une somme de fl. $586,27\frac{1}{2}$. En continuant ainsi d'année à année jusqu'à ce que toutes les personnes sont décédées, je trouve une somme de fl. 12574,5 au bout de 43 ans. Si l'on doit recevoir annuellement fl. 80 par personne, le nombre 12574,5 doit être multiplié par 80; on trouve ainsi le nombre 1005960. Le logarithme de ce nombre est 6,002580. La différence des logarithmes de 41 et de 40 est 0,0107238; en multipliant ce nombre par 43, nombre des années, on trouve 0,461123. En y ajoutant le logarithme de 292, on trouve une somme de 2,926506. En retranchant ce nombre du nombre 6,002580 trouvé précédemment, on obtient un reste de 3,076074. Le nombre correspondant à ce logarithme est un peu plus grand que 1191; c'est là le nombre de florins qu'il faut payer au comp-

---

1) Par rentiers je n'entends par ici ceux qui obtiennent les rentes, mais plutôt les personnes assurées.

2) Je prends un taux d'intérêt si bas pour pouvoir faire une comparaison avec les rentes viagères d'Amsterdam.

tant dans la classe de 50 à 55 ans pour obtenir une rente annuelle nette de fl. 80.

Je fais ensuite le même calcul pour les 210 enfants âgés de 5 à 10 ans et je trouve que les acheteurs ont reçu au bout de 45 ans, intérêts compris, fl. 1132136. Or, à cette époque 130 personnes âgées de 50 à 55 ans vivaient encore, comme on peut le voir par le dernier tableau. La valeur de chaque rente viagère correspondant à une personne de cet âge est de fl. 1191, comme ou l'a trouvé plus haut; les 130 rentes valent donc 154830 florins, et en ajoutant cette somme aux fl. 1132136 trouvés plus haut, on obtient fl. 1286966 en tout. En multipliant ensuite par 45, nombre des années, la différence du logarithme de 41 et de celui de 40, en y ajoutant le logarithme de 210, en retranchant la somme du logarithme de 1286966 et en cherchant le reste dans la table des logarithmes, on obtient le nombre 2009. C'est là le nombre de florins qu'il faut payer au comptant pour chaque personne appartenant à la classe de 5 à 10 ans, afin d'obtenir chaque année une rente de fl. 80.

Dans la onzième classe de la première tontine de Paris, dont la dernière personne est morte en 1734, on trouve 701 personnes âgées de 50 à 55 ans. La statistique des décès des personnes appartenant à cette classe fait voir qu'à cet âge le prix d'une assurance n'est que de fl. $1113\frac{1}{2}$. En me servant de ce nombre je trouve que l'assurance d'une personne appartenant à la classe de 5 à 10 ans vaut fl. $2001\frac{1}{2}$, ce qui ne diffère pas beaucoup de la valeur trouvée plus haut.

Pour éviter les longueurs j'ai calculé de la façon suivante la valeur des assurances pour chaque classe de 5 à 5 ans. Quant aux classes déjà disparues, j'ai fait les calculs correspondants en me basant sur la vraie statistique de la mortalité. Je n'ai pas corrigé les irrégularités des régistres des décès. Voici d'abord un tableau où les différentes mortalités sont comparées les unes avec les autres.

Ages des différentes classes	Nombres des personnes composant la tontine A	Nombres des décès en 5 ans B	Nombres des décès sur 1000 personnes, à Paris et à Amsterdam, pour montrer la difference C	D	Nombres des décès sur 1000 ecclesiastiques français E	F	G
					Eccl. mâles	Eccl. fém.	Moyenne
De 10 à 15 ans	1290	47	36	42			
,, 15 ,, 20 ,,	1685	77	46	54	—	—	—
,, 20 ,, 25 ,,	1985	96	48	67	39	37	38
,, 25 ,, 30 ,,	2383	116	49	77	40	41	40
,, 30 ,, 35 ,,	3112	165	53	87	49	52	50
,, 35 ,, 40 ,,	3705	181	49	99	58	54	56
,, 40 ,, 45 ,,	4805	261	54	120	69	68	68
,, 45 ,, 50 ,,	5394	385	71	151	93	68	80
,, 50 ,, 55 ,,	5763	569	99	181	125	97	111
,, 55 ,, 60 ,,	5546	698	126	217	153	128	140
,, 60 ,, 65 ,,	4848	792	163	260	205	166	185
,, 65 ,, 70 ,,	4036	953	236	311	298	234	266
,, 70 ,, 75 ,,	3077	1072	348	390	413	350	381
,, 75 ,, 80 ,,	2047	1008	492		565	459	512
,, 80 ,, 85 ,,	979	599	612		715	658	686
,, 85 ,, 90 ,,	323	273	845		873	667	770

Voici l'explication de ce tableau. La première colonne contient les classes de 5 à 5 ans. La deuxième colonne, indiquée par la lettre A, donne le nombre des personnes, hommes et femmes, de l'âge indiqué qui faisaient partie des deux tontines de Paris, des années 1689 et 1696. La troisième colonne, indiquée par la lettre B, contient les nombres des décès des personnes de chaque classe ayant eu lieu pendant 5 ans. La quatrième colonne C donne les nombres des décès tels qu'ils auraient été si chaque classe des tontines en question avait compris 1000 personnes. La cinquième colonne D représente les nombres des décès survenus parmi les 1000 personnes, hommes et femmes, calculés d'après les rentes viagères d'Amsterdam. Dans la sixième colonne E on trouve les nombres des décès ayant eu lieu dans chaque classe sur 1000 personnes pour les ecclésiastiques mâles de Paris, savoir ceux de St. Maur, de St. Geneviève, des Bénédictins et des autres ordres. La septième colonne F indique pour chaque classe la mortalité parmi 1000 ecclésiastiques du sexe féminin à Paris. La huitième colonne G donne la moyenne des deux colonnes précédentes, celle des hommes et celle des femmes. On voit qu'il y a une diffé-

rence notable entre les nombres des décès qui surviennent parmi les rentiers français d'une part et les rentiers hollandais d'autre part, et il vaut bien la peine, si l'on peut obtenir un plus grand nombre de statistiques de rentes viagères et de tontines, d'examiner ce point plus amplement.

Pour faire maintenant le calcul de la valeur des assurances, je prends l'exemple suivant. Il faut payer au comptant une somme de fl. 1775 pour assurer une personne appartenant à la classe de 20 à 25 ans, c. à. d. pour se procurer de cette façon une rente annuelle nette de fl. 80, y compris un intérêt de $2\frac{1}{2}$ %. Nous voulons savoir quelle somme il faut payer au comptant, lorsqu'on assure une personne appartenant à la classe de 25 à 30 ans, pour obtenir la même rente annuelle. Le tableau précédent fait voir que sur 1000 personnes appartenant à cette classe il en meurt 49 endéans 5 ans, donc à-peu-près 1 sur 100 par an. Si nous prenons 100 pour le nombre des personnes assurées de la classe de 20 à 25 ans, la société qui vend les assurances reçoit fl. 177500; en y ajoutant la quarantième partie, c. à. d. l'intérêt d'une année, on obtient une somme de fl. 181937. Retranchez-en 99 × fl. 80, ce qui représente la somme qui doit être payée à ceux qui vivent encore après un an. Il reste fl. 174017. En continuant à raisonner ainsi pour 5 années consécutives, on trouve enfin fl. 160014. En divisant cette somme par 95, nombre des personnes survivantes, on trouve un quotient de fl. 1684. C'est là le prix cherché de l'assurance qui nous procure la rente viagère annuelle.

Si l'on désire savoir le prix de l'assurance d'une personne appartenant à la classe précédente, en partant de la valeur que nous avons trouvée en dernier lieu, on fait le calcul inverse. Aux fl. 160014 trouvés ci-devant j'ajoute 95 × fl. 80; je trouve une somme de fl. 167614. En déduisant l'intérêt produit en un an, c. à. d. en multipliant par la fraction $\frac{40}{41}$, on trouve une somme de fl. 163526. En faisant ainsi le calcul inverse pour 5 années consécutives, on trouvera une somme de fl. 177500. Divisant enfin cette somme par 100, nombre des personnes qui vivaient il y a 5 ans, on obtient le résultat demandé, fl. 1775; c'est là le prix de l'assurance d'une personne de 20 à 25 ans. De cette façon j'ai calculé le prix de l'assurance pour chaque classe comme on peut le voir ci-dessous.

Prix des assurances.

Age	à Paris	à Amsterdam	Différence	Age	à Paris	à Amsterdam	Différence
De 0 à 5 ans	fl. 2048			De 40 à 45 ans	fl. 1321	fl. 1139	fl. 172
,, 5 ,, 10 ,,	,, 2009	fl. 1896	fl. 113	,, 45 ,, 50 ,,	,, 1202	,, 1010	,, 192
,, 10 ,, 15 ,,	,, 1922	,, 1776	,, 146	,, 50 ,, 55 ,,	,, 1101	,, 889	,, 212
,, 15 ,, 20 ,,	,, 1851	,, 1668	,, 183	,, 55 ,, 60 ,,	,, 1015	,, 819	,, 196
,, 20 ,, 25 ,,	,, 1775	,, 1565	,, 210	,, 60 ,, 65 ,,	,, 903	,, 712	,, 191
,, 25 ,, 30 ,,	,, 1684	,, 1470	,, 214	,, 65 ,, 70 ,,	,, 793	,, 595	,, 198
,, 30 ,, 35 ,,	,, 1576	,, 1375	,, 201	70 ans et au-dessus.....	,, 670	,, 481	,, 189
,, 35 ,, 40 ,,	,, 1447	,, 1248	,, 199				

On voit qu'il y a une différence notable entre les prix des assurances de personnes du même âge à Paris et à Amsterdam; cette différence est de fl. 187 pour chaque classe en moyenne. Elle doit provenir de ce que la durée moyenne de la vie de tous les hommes est plus longue en un endroit qu'en un autre; à moins qu'on ne veuille admettre une mortalité extra-ordinaire parmi les rentiers d'Amsterdam que j'ai pris pour exemples. Celui qui en a l'occasion et qui s'y intéresse peut examiner la même question dans d'autres cas et d'autres endroits. Dans les nouvelles découvertes on atteint rarement de prime abord la plus grande perfection. M. DEPARCIEUX soupçonnait également que les parisiens vivent un peu plus longtemps que les amsterdamois. 1) Il serait à souhaiter qu'il eût donné séparément les nombres des hommes et des femmes, et aussi les statistiques des décès d'autres tontines, en tant qu'on les possède.

Lorsque les personnes appartenant à toutes les classes des tontines seront décédées et qu'on possédera plus de données sur la mort des fort jeunes enfants en France, on pourra déterminer encore plus exactement le prix des assurances en ce pays.

Les données suivantes font voir qu'à Paris les hommes atteignent un assez grand âge, si nous supposons bien entendu qu'on puise se fier aux chiffres. Dans la paroisse de St. Sulpice on a enterré 48540 personnes en 30 ans 2). Parmi celles-ci il y avait.

17	femmes et	5	hommes âgés de	100 ans
9	,, ,,	3	,, ,, ,,	99 ,,
10	,, ,,	3	,, ,, ,,	98 ,,
126	,, ,,	99	,, ,, ,,	plus de 90 ans.

1) ,,Essai sur les prob. de la durée de la vie humaine" p. 62.

2) Même ouvrage, p. 97.

Il paraît donc que sur 2200 personnes il y en a une qui atteint l'âge de 100 ans, et sur 216 personnes une qui atteint l'âge de 90 ans.

En 1748 ANNE MARIE BRIDOW, veuve de feu M. LEPREUIL DE PRÉ-FONTAINE, avocat du parlement, est morte à l'âge de 100 ans. Elle était depuis le 25 Avril 1744 la dernière et unique personne appartenant à la neuvième classe de la tontine considérée établie en Novembre 1689. Elle recevait donc tous les revenus de cette classe quoiqu'elle ne possédât qu'une seule assurance qui valait primitivement 300 livres.

Je comparerai encore d'une autre façon les habitants de Breslau en général d'une part, les rentiers de Paris et d'Amsterdam d'autre part. Comme je l'ai dit plusieurs fois, les décès des fort jeunes enfants ne peuvent être trouvés ni dans les livres des rentes viagères ni dans ceux des tontines. C'est pourquoi je commence par les enfants de 10 ans. J'admets que les nombres des personnes de différents âges vivant dans les villes considérées sont à-peu-près dans les mêmes rapports que les nombres correspondants de personnes faisant partie des tontines ou recevant une rente viagère. Je n'ai pas corrigé l'irrégularité des décès dans chaque classe. Le tableau suivant donne les nombres des décès des rentiers de Paris et d'Amsterdam comparés avec la table du docteur HALLEY. Je commence par des nombres égaux d'enfants âgés de 10 ans et je fais voir quels sont les nombres des survivants tous les 5 ans.

Age	Breslau	Paris	Amsterdam	Age	Breslau	Paris	Amsterdam	Age	Breslau	Paris	Amsterdam
10	661	661	661	35	490	524	471	60	242	323	184
15	628	637	637	40	445	497	424	65	192	270	127
20	598	608	599	45	397	470	374	70	142	206	67
25	567	579	559	50	346	427	318	75	88	124	
30	531	551	516	55	292	385	249	80	41	63	

Il ne faut pas se contenter de cette table. Il est possible que les rentiers vivent en moyenne plus longtemps que d'autres personnes. Il ne serait pas mauvais d'examiner la même question en se servant de plus grands nombres; on pourra les obtenir par les statistiques des tontines et par les livres des rentes viagères après le décès de toutes les personnes assurées.

Un monsieur de condition m'a dit qu'en France on fraude parfois en indiquant les âges pour les tontines et les rentes viagères, et

que parfois on reçoit de l'argent pour des personnes déjà mortes depuis quelque temps disant qu'elles vivent encore. Les comptables du roi ne font pas attention à ces faussetés parce qu'on leur fournit tout l'argent nécessaire. Cela ne peut d'ailleurs faire de tort aux personnes faisant partie de la tontine, à moins qu'il ne s'agisse de la dernière personne de chaque classe. Il en résulte que les personnes faisant partie des tontines et celles qui reçoivent des rentes viagères semblent vivre plus longtemps qu'elles ne vivent en réalité; mais pour ma part, je ne crois pas que cela fait généralement une grande différence. On voit pourtant que des calculs basés sur ces statistiques ne peuvent pas encore être parfaits.

Troisième Chapitre.

Des assurances qui ne procurent pas immédiatement la rente viagère aux acheteurs.

Quelques auteurs disent qu'on donnait autrefois en Italie une certaine somme d'argent pour des enfants nouveau-nés, et qu'en retour, après quelques années, ceux qui vivaient encore recevaient annuellement durant toute leur vie une somme égale à cette somme-là 1). J'ai cependant de la peine à croire que de pareils contrats ont souvent été exécutés 2), vu qu'ils sont au désavantage de la société d'assurances.

J'examinerai ici quelle est la somme annuelle à laquelle on a droit si l'on attend quelques années avant d'obtenir la rente. Je prend pour exemple le cas suivant: on assure pour fl. 1000 la vie de tous les garçons nés vivants, à cette condition que les rentes ne seront payées que 20 ans, 25 ans, etc. (comme on peut le voir dans la suite) plus tard à ceux qui vivront encore à cette époque. La question est de savoir quelle doit être la rente annuelle par personne, si la société d'assurances paye un intérêt annuel de $2\frac{1}{2}$ %.

---

1) Dans le „Grand magasin historique" par SIMON DE VRIES, p. 569, il est dit que si l'on avait donné une certaine somme pour une fille nouveau-née, le décuple de cette somme lui était restitué au bout de 18 ans. Il cite MERULA, Cosmogr. Part. 2. Livre 4; BERNHARD CARDON, Livre 2. Hist. Patav. Class. 5; ARNOLD DE FERRAR. ad Consuet. Burdigal. Livre 2, Tit. 8; LASSENII „Bürgerliche Tischreden" (Propos de table bourgeois) p. 374.

2) M. DEPARCIEUX „Des rentes viagères", p. 128.

Pour calculer cela je pars de ce fait que le prix de l'assurance pour une personne du sexe masculin âgée de 20 ans est de fl. 1665 d'après la table de HALLEY, si l'on désire recevoir une rente annuelle nette de fl. 80; de fl. 1557 pour une personne de 25 ans, etc. 1). Pour trouver la deuxième colonne, je dis: fl. 1665 donnent une rente annuelle de fl. 80, fl. 100 donnent donc une rente annuelle de fl. 4,80, c.à.d. de 4 florins et de 16 sous. Je dis ensuite: fl. 1557 donnent une rente annuelle de fl. 80, fl. 100 donnent donc une rente annuelle de fl. 5,14, etc. Je cherche alors ce que valent 1000 florins au bout de 20 ans, de 25 ans, etc., étant placés à un intérêt composé de $2\frac{1}{2}$ %; ce qu'il est fort aisé de calculer. Car si l'on multiplie le nombre des années par la différence des logarithmes de 41 et de 40, qu'on ajoute au produit le logarithme de 1000 et qu'on cherche la somme dans la table des logarithmes, le nombre correspondant à ce logarithme est le nombre cherché. Par exemple: fl. 1000 au bout de 20 ans valent fl. 1639; l'intérêt de 4,80 % est de fl. 79; et ainsi trouve-t-on cette colonne entière qui représente la rente annuelle correspondant à une assurance de fl. 1000. Je n'ai pas tenu compte des fractions. La dernière colonne donne les rentes viagères en %.

Age	Prix de l'assurance	%	Mille florins après un certain nombre d'années	Rente annuelle	%
20	fl. 1665	4,80	fl. 1639	fl. 79	8
25	,, 1557	5,14	,, 1836	,, 94	9
30	,, 1449	5,52	,, 2098	,, 116	11
35	,, 1341	5,97	,, 2372	,, 142	14
40	,, 1231	6,50	,, 2685	,, 175	17
45	,, 1121	7,14	,, 3038	,, 217	21
50	,, 1009	7,92	,, 3437	,, 272	27
55	,, 901	8,88	,, 3889	,, 345	34
60	,, 774	10,34	,, 4400	,, 455	45
65	,, 638	12,54	,, 4981	,, 625	62
70	,, 495	16,16	,, 5632	,, 910	91

Cette table fait voir qu'on pourrait avoir au bout de 71 ans une rente annuelle égale au prix de l'assurance, c.à.d. une rente de fl. 1000. Mais que le nombre de ceux qui atteignent cet âge

1) Consultez l'Appendice à mon ouvrage: „Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine", p. 223.

est petit! Si l'intérêt est plus élevé il n'est pas nécessaire d'attendre si longtemps. Par exemple: si l'intérêt est de 5 %, il faut attendre 43 ans et 3 mois d'après les calculs de M. DEPARCIEUX, au cas où il s'agit d'enfants âgés de 0 à 5 ans; on reçoit ensuite une rente annuelle égale au prix de l'assurance 1). Pour des personnes qui possèdent un certain capital et qui s'efforcent, autant qu'il est possible, d'empêcher que leurs enfants ne tombent dans la misère à un âge avancé, ces sortes de contrats sont utiles. Il me semble pourtant que ces personnes préféreront assurer leurs enfants à condition de leur faire toucher après $27\frac{1}{2}$ ans une rente annuelle de 10 %, ou après 49 ans une rente annuelle de 20 %.

Quatrième Chapitre.

Des tontines

ou rentes viagères avec avantage de survivance.

Les assurances sur la vie ne sont pas toujours conclues aux conditions ordinaires, savoir que chaque personne assurée obtiendra la rente annuelle convenue durant sa vie entière; quelquefois, pour les rendre plus agréables au public, on s'arrange de telle manière que les rentes des personnes assurées augmentent continuellement à mesure que leur nombre diminue par la mort des co-assurés et ne cessent qu'à la mort de la dernière personne assurée. Beaucoup de gens prennent plaisir à ces sortes de contrats, d'abord parce qu'ils veulent assurer leurs vieux jours vu que l'argent ne leur est pas si nécessaire à l'heure actuelle mais qu'en vieillissant ils veulent vivre un peu plus largement, ensuite parce qu'il leur plaît de hasarder quelque chose pour obtenir un gain considérable. D'autres le font pour pouvoir mieux prendre soin de leurs enfants. Différents projets ont été construits pour les satisfaire, entre autres le suivant. On divise la somme totale que recevra la compagnie d'assurances en un nombre égal de parties ou d'actions, dont chacun peut en prendre autant qu'il lui plaît, assurant ainsi des personnes arbitrairement choisies. On réunit alors en classes les personnes qui ont à-peu-près le même âge; dans la première par exemple les enfants âgés de moins de cinq ans; dans la deuxième les enfants de 5 à 10 ans, dans la troisième ceux de

1) „Essai sur les prob. de la durée de la vie humaine", Tabl. 21, Paris, 1746.

10 à 15 ans, et ainsi de suite, chaque classe comprenant cinq années. On promet de payer annuellement une certaine somme à chaque classe; cette somme est plus grande pour une classe composée de personnes plus âgées. Chaque année cette somme est divisée entre les personnes encore vivantes faisant partie de la classe considérée, d'après le nombre d'actions qu'elles possèdent, jusqu'à ce que la dernière personne appartenant à cette classe a disparu.

On voit aisément qu'il est nécessaire de grouper ensemble les personnes ayant environ le même âge. En effet, pour une personne de 70 à 75 ans ce serait un grand désavantage que d'être placée dans une classe composée de jeunes gens pour la plus grande partie.

Cette espèce de contrat s'appelle une tontine, d'après un Italien appelé LAURENT TONTI qui en 1653 présenta au Roi de France un projet de ce genre.

J'ai inventé il y a environ quarante ans une méthode rapide pour faire le calcul des tontines 1) que je présenterai ici dans une forme quelque peu différente, surtout pour ceux qui ne possèdent pas l'ouvrage que je viens de nommer. Je suppose que la société reçoive une somme de a florins pour une classe entière; qu'annuellement, tant qu'il vit une personne appartenant à cette classe, elle paye à cette classe e florins; que pour chaque somme de b florins, elle paye en somme, au bout de l'année, capital et intérêt, x florins; et que la classe s'éteigne n années après la validation du contrat. Si nous posons en outre $b = 100$, et

$$a : e = b : r,$$

le nombre r représente le taux de l'intérêt annuel de chaque action, et l'on aura $a r = b e$.

Pour faire le calcul je remarque que a florins valent au bout de n années, avec l'intérêt dont nous avons parlé, $a\frac{x^n}{b^n}$ florins. Les assurés à leur tour reçoivent au bout d'une année e florins. Cette somme peut être placée à intérêt durant $(n - 1)$ années et vaudra donc au bout d'un an, capital et intérêts, $e\frac{x^{n-1}}{b^{n-1}}$. Au bout de deux ans on reçoit de nouveau e florins lesquels, $n - 2$ ans plus tard, valent

1) Consultez le „Calcul des Loteries et des Intérêts", par N. S. imprimé à Amsterdam, 1716, p. 133 et 139.

avec l'intérêt $e\frac{x^{n-2}}{b^{n-2}}$ florins. En continuant de la sorte, on trouve que les acheteurs des actions, en retour de l'argent qu'ils ont dépensé, reçoivent une somme exprimée par la série

$$e\frac{x^{n-1}}{b^{n-1}} + e\frac{x^{n-2}}{b^{n-2}} + e\frac{x^{n-3}}{b^{n-3}} + e\frac{x^{n-4}}{b^{n-4}} + e\frac{x^{n-5}}{b^{n-5}} + \text{etc.}$$

Le nombre des termes qui forment tous une progression géométrique, est de $n - 1$, et leur somme totale est

$$\overline{\frac{x^n}{b^n} - 1} \cdot \frac{be}{x - b}.$$

Cette expression doit être égale à $a\frac{x^n}{b^n}$. Si l'on pose

$$\frac{x^n}{b^n} = z,$$

on trouvera

$$\overline{z - 1} \cdot \frac{be}{x - b} = az.$$

En remplaçant alors be par ar et en cherchant la valeur de z, on trouve

$$z = \frac{r}{b + r - x}.$$

Supposant le nombre x connu, de telle manière que $x - b$ ne soit inférieur que de peu à r, et examinant si ce nombre satisfait à l'équation, on trouvera, après 2 ou 3 essais, la valeur de x avec une approximation suffisante. Cette méthode peut servir à examiner des projets proposés : on peut voir ainsi si la société ne devra pas payer un intérêt plus élevé que celui que l'auteur de chaque projet annonce, ce qui est souvent le cas.

La plus grande difficulté consiste à déterminer approximativement la durée de chaque classe. En effet, on ne dispose pas de statistiques suffisantes permettant de trouver cette durée probable avec certitude. La plupart des auteurs de projets attribuent une durée trop courte à chaque classe, calculant ainsi à l'avantage des acheteurs des assurances ; ils devraient prendre des laps de temps plus longs, et alors les sommes reçues annuellement par les différentes classes deviendraient moindres. Si l'on ne prend pas un trop grand nombre de personnes dans une classe, il semble qu'ici en Hollande, la dernière personne de chaque classe atteint en moyenne un âge de 93 ou 94 ans. On doit peut-être,

à l'avantage de la société, prendre un âge encore un peu plus avancé à cause des cas étranges qui se présentent quelquefois. M. VARENNE, dans le duché de Maine, par exemple, a été la dernière personne d'une des classes d'une tontine française : il est mort à l'âge de 101 ans. 1) Tant qu'on ne possède pas de nouvelles statistiques on peut admettre, semble-t-il, que la première classe durera 90 ans, la deuxième 88 ans, la troisième 83 ans, et ainsi de suite, chaque fois 5 ans de moins. La durée de la dernière classe, celle de 70 ans, sera donc de 23 ans.

Considérons ce qu'enseigne l'expérience à propos des classes déjà éteintes de deux tontines françaises, dont la première a commencé en Novembre de l'année 1689 et la seconde en Février de l'année 1696. 2) J'admettrai que la première a commencé au commencement de 1690 et la deuxième au commencement de 1696. La première des classes considérées, appartenant à la première tontine, se composait au commencement de 634 personnes âgées de 50 à 55 ans; elle s'est éteinte 48 ans plus tard. Je suppose que ce soit une des plus jeunes personnes faisant partie de cette classe qui est morte la dernière; cette personne doit alors avoir atteint l'âge de 98 ans; mais si c'était une des plus âgées, cette classe de la tontine eût pu durer encore 4 ou 5 années de plus. 3)

	Année 1690			Année 1696		
	Nombre des personnes	Durée	Age	Nombre des personnes	Durée	Age
50 à 55 ans	634	48	98	292	42	92
55 ,, 60 ,, ...	701	44	99	239	36	86
60 ,, 65 ,, ...	361	43	103	212	35	95
65 ,, 70 ,, ...	407	36	101	167	30	95
70 ans et au-dessus. .	218	27	97	162	27	97

Je ferai suivre ici l'exemple d'une tontine récemment constituée à Paris. On y pouvait acheter avec avantage de survivance des assurances réparties en différentes classes, comprenant chacune

1) ,,Die Gottliche Ordnung" par J. C. SUSZMILCH, p. 21.

2) Consultez DEPARCIEUX dans son ouvrage cité plus haut, Tab. 6, 7.

3) L'auteur veut dire que si c'est une personne de 55 ans qui en a vécu encore 48, et si cette personne était née 5 ans plus tard, de sorte qu'elle n'aurait eu que 50 ans au commencement de la tontine, la classe ne se serait éteinte qu'après 53 ans. (N. d. tr.).

300 actions. Cette tontine se composait de 30000 actions en tout, chacune de 300 Livres 1). Ces actions étaient réparties comme suit et donnaient les rentes indiquées dans le tableau.

1) Actuellement une livre française vaut, en argent hollandais, $9\frac{3}{8}$ sous; 32 livres françaises valent donc 15 florins hollandais. Consultez „La véritable méthode pour trouver le pair dans les changes par la valeur intrinsèque des Espèces d'Or et d'Argent", pag. 615. C'est le titre d'un traité que j'ai fait imprimer ici à Amsterdam en 1733. Autrefois les livres avaient ici une tout autre valeur, comme cela ressort de la liste suivante que j'ai tirée d'un tableau fait par le Sr DERNIS, gravé sur cuivre en 1744, à Paris, et imprimé avec le privilège du Roi. J'ajoute ici cette liste pour être utile à ceux qui lisent les anciennes histoires françaises: de cette façon ils ne se formeront pas d'idées fausses lorsqu'ils y trouveront le mot livres. Le Pape BONIFACE VIII par exemple, un homme sensé et qui connaissait fort bien les choses temporelles, raconta en 1302, en tenant un discours en plein consistoire, que les revenus de PHILIPPE AUGUSTE, Roi de France, grand-père de St. LOUIS, n'avaient pas dépassé 90000 livres. Ce nombre de livres ne valait que 750 marcs d'argent en 1718; tandis qu'à l'époque considérée $2\frac{1}{2}$ livres valaient un marc d'argent; cette somme était donc de 36000 marcs d'argent, ce qui est 48 plus que le nombre que nous venons de trouver. La différence est grande. Consultez BOULAINVILL. Tome 3, pag. 73.

Valeurs diverses des livres françaises sous divers gouvernements.

	Années	Un marc d'argent valait (Livres. Sous. Deniers.)
De Charlemagne à Louis VI.........	761—1113	0 : 15 : —
Sous Louis VII....................	1113—1158	2 : 13 : 4
,, Philippe Auguste..............	1158—1222	2 : 10 . —
,, St. Louis et Philippe le Hardy..	1222—1226	2 : 14 : 7
,, Philippe le Bel...............	1226—1285	2 : 15 : 6
,, Louis Hutin et Philippe le Long.	1285—1313	2 : 14 : —
,, Charles le Bel................	1313—1321	2 : 18 : —
,, Philippe de Valois............	1321—1344	3 : 8 : 3
,, le Roy Jean...................	1344—1364	5 : — : —
,, Charles V.....................	1364—1380	5 : 5 : —
,, Charles VI....................	1380—1422	7 : — : —
,, Charles VII...................	1422—1461	8 : 15 : —
,, Louis XI......................	1461—1483	10 : — : —
,, Charles VIII..................	1483—1497	11 : — : —
,, Louis XII.....................	1497—1514	12 : 10 : —
,, François I....................	1514—1546	14 : — : —
,, Henry II et François II........	1546—1559	15 : — : —
,, Charles IX....................	1559—1574	17 : — : —
,, Henry III.....................	1574—1589	18 : 16 : 4
,, Henry IV......................	1589—1611	20 : 15 : —
,, Louis XIII.....................	1611—1642	27 : — : —
,, Louis XIV.....................	1642—1715	40 : — : —
,, Louis XV } Sous le Régent.....	1715—1720	120 : — : —
,, Louis XV }	1720—1726	49 : — : —

	Nombres des classes	Nombres des actions	Rente de chaque action en livres	Rentes annuelles en livres	Taux de l'intérêt
1. De 0 à 5 ans.....	2	600	20	12000	$6\frac{2}{3}$
2. „ 5 „ 10 „	3	900	21	18900	7
3. „ 10 „ 15 „	4	1200	22	26400	$7\frac{1}{3}$
4. „ 15 „ 20 „	5	1500	23	34500	$7\frac{2}{3}$
5. „ 20 „ 25 „	6	1800	24	43200	8
6. „ 25 „ 30 „	8	2400	25	60000	$8\frac{1}{3}$
7. „ 30 „ 35 „	9	2700	27	72900	9
8. „ 35 „ 40 „	10	3000	29	87000	$9\frac{2}{3}$
9. „ 40 „ 45 „	11	3300	30	99000	10
10. „ 45 „ 50 „	12	3600	31	111600	$10\frac{1}{3}$
11. „ 50 „ 55 „	10	3000	32	96000	$10\frac{2}{3}$
12. „ 55 „ 60 „	7	2100	34	71400	$11\frac{1}{3}$
13. „ 60 „ 65 „	6	1800	36	64800	12
14. „ 65 „ 70 „	4	1200	37	44400	$12\frac{1}{3}$
15. „ 70 ans et au-dessus	3	900	39	35100	13

Pour calculer d'après la formule de la page 404 le taux de l'intérêt que la société paye aux assurés, je considérerai la dernière classe et j'admettrai que sa durée est de 23 ans. Alors $n = 23$, $b = 100$, $r = 13$. Il s'ensuit que $\frac{x^{23}}{100^{23}} = \frac{13}{113 - x}$.

On trouve aisément qu'on a à-peu-près $x = 112\frac{1}{20}$.

Le taux de l'intérêt est donc de $12\frac{1}{20}$ %. Dans toutes les classes précédentes les taux de l'intérêt diffèrent fort peu des taux des rentes annuelles. Ce contrat doit donc être fort avantageux pour le public et désavantageux pour le Roi, si l'on suppose que les rentes soient payées régulièrement et que la valeur des livres ne soit pas changé. En effet, quand même on supposerait que la durée de chaque classe de la tontine soit encore inférieure de 5 ans à celle que j'ai admise, on devra néanmoins payer plus de

42 millions tandisqu'on n'en reçoit que 9. Le grand désavantage de ceux qui vendent les actions aux conditions indiquées peut aussi être démontré de la façon suivante. Il est peu probable qu'au bout de 12 ou de 13 ans une des classes sera éteinte; par conséquent le payement intégral qui est de $9\frac{56}{75}$ % devra avoir lieu tous les ans pendant ce temps. Je me propose maintenant de calculer au bout de combien de temps tout l'argent reçu par le Roi sera rendu par lui aux assurés, avec un intérêt de $2\frac{1}{2}$ %, comme on le payait en Hollande en 1746. Comme le nombre x est alors connu, je le remplace par le nombre p dans la formule de la page 404, tandis qu'à n, nombre inconnu, je substitue y. Je trouve ainsi

$$\frac{p^y}{b^y} = \frac{r}{b + r - p}.$$

Posant $b + r - p = m$ et prenant alors le logarithme de l'équation, on trouve

$$y = \frac{\log. r - \log. m}{\log. p - \log. b}.$$

En ce cas $r = 9\frac{56}{75}$, $m = 6\frac{37}{150}$, $p = 102\frac{1}{2}$ et $b = 100$. Par conséquent, les nombres r et m sont entre eux comme 1462 et 937, et les nombres p et b, comme 41 est à 40; et il suffit de diviser la différence des logarithmes de 1462 et de 937 par celle des logarithmes de 41 et de 40. On trouve ainsi le résultat: 12 années. Au bout de ce court espace de temps tout l'argent d'après nos hypothèses sera rendu au public avec un intérêt de $2\frac{1}{2}$ %. On peut songer quelles grandes sommes d'argent devront encore être payées avant que toutes ces classes, surtout la première et celles qui la suivent, auront disparu. Dans l'ouvrage intitulé „l'Encyclopédie", dont la première partie a été imprimée à Paris en 1751, je trouve dans cette partie au mot „Annuïté" quatre problèmes, que j'ai déjà considérés en 1716 [1]). Le quatrième (p. 132) est le suivant. Supposons qu'on prête à quelqu'un a florins pour recevoir à son tour e florins par an, durant y ans, de telle sorte qu'un intérêt de c % par an y soit compris, et qu'on prenne l'intérêt

1 Dans le „Calcul des Loteries et des Intérêts", par N. S. imprimé à Amsterdam, en 1716.

composé, quel sera le nombre considéré d'années? L'auteur dit de ce problème: „Mais ce problème est encore plus difficile, l'inconnue se trouvant ici en exposant. On peut néanmoins le résoudre par tâtonnement; mais je ne connais point de méthode directe pour y parvenir." On peut cependant fort bien résoudre ce problème directement. En effet, nous avons trouvé, à la page 403,

$$a\,r = b\,e,$$

donc $$r = \frac{b\,e}{a}.$$

On a aussi $$x = b + c,$$
et d'après la formule

$$\overline{\frac{b+c}{b}}^{\,y} = \frac{r}{r-c}.$$

Posez $\frac{b+c}{b} = m$, prenez le logarithme des deux membres de l'équation et cherchez la valeur de y. Vous trouverez

$$y = \frac{\log.\,r - \log.\,\overline{r-c}}{\log.\,m}.$$

C'est là le nombre cherché d'années.

En se servant de la formule de la page 404, on peut instituer une tontine telle qu'on la préfère. Je suppose par exemple que les payements annuels soient les mêmes pour toutes les classes. Dans la formule $\frac{b}{x-b}$ représente le nombre de florins sur lesquels la société d'assurances paye un intérêt annuel d'un florin; ce nombre est ici connu; je l'appelle g. Le nombre z est également connu; je le remplace donc par s. Soit x le nombre des actions appartenant à chaque classe et supposons que chaque action ait été achetée pour d florins. Le nombre a doit donc être remplacé par d x, et par conséquent

$$\overline{s-1}\;g\,e = d\,s\,x$$

ou $$x = \frac{\overline{s-1}\,.\,e\,g}{d\,s}.$$

Pour en faire une application numérique, je prends e = fl. 3000 pour le payement annuel reçu par chaque classe, g = 40 et d = 250; et je considère la classe des jeunes gens âgés de 10 à 15 ans, supposant que cette classe durera 83 ans. Je pose ensuite b = 100 et j'agis comme suit.

log. ge ou 120000 = 5,079181 log. $\frac{41}{40}$ = 0,010723,8
83

log. $\overline{s-1}$ = 0,830191 log. s = 0,890075 ; nombre correspondant: 7,7638

5,909372 log. d = 2,397940

log. d s = 3,288015 log. d s = 3,288015

2,621357

x = 481 actions. L'argent payé au comptant par le public = fl. 104500.

Si je suppose que la classe de 40 à 45 ans ait une durée de 53 ans, le nombre des actions doit être de 286 et l'argent payé au comptant de fl. 71500. Si la société peut vendre un plus grand nombre d'actions appartenant à une même classe, il n'est pas nécessaire de refuser: on peut diviser ces actions et en faire un plus grand nombre de classes. En effet, il est plus avantageux pour la société de mettre un petit nombre de gens dans une même classe. Si l'on voulait instituer une tontine de 200 actions, dont chacune coûterait fl. 250, l'intérêt annuel payé par la société étant de $2\frac{1}{2}$ %, et la durée de 83 années; et si l'on désirait savoir quel est le % de l'argent reçu par la société qu'elle doit payer annuellement en rentes, on peut aisément trouver ce % à l'aide du calcul suivant.

Log. s = 0,890075 trouvé plus haut

Log. $2\frac{1}{2}$ = 0,397940

1,288015

Log. $\overline{s-1}$ = 0,830191

0,457824

On trouve ainsi 2,8696 %. Le payement annuel est donc de fl. 1434 et de 16 sous.

Cinquième Chapitre.

Remarques sur les pensions pour veuves.

Parmi les gens mariés, dans les cas où le mari occupe un poste ou en général reçoit un salaire qui cessera d'être payé le jour de sa mort, quelques-uns ont commencé depuis quelque temps à prendre soin de leurs épouses dans le cas où elles survivent leurs maris; il s'agit d'empêcher que les veuves, faute d'un revenu fixe, ne tombent dans la misère, si elles ne possèdent pas un capital suffisant. A cet effet quelque maris conviennent de payer chaque

année tant que leur mariage subsiste une certaine somme d'argent et de confier cet argent à quelques directeurs. Une telle institution s'appelle une Caisse de Veuvage: cette caisse paye annuellement à chaque veuve dont le mari a signé le contrat (ou à une autre femme arbitrairement choisie par un des membres qui est célibataire ou qui assure la vie d'une femme qui n'est pas son épouse) une somme fixe jusqu'au jour de sa mort ou jusqu'à ce qu'elle se remarie. Dernièrement on a créé un grand nombre de ces caisses ici à Amsterdam et dans d'autres villes de notre pays 1); mais les conditions et les règlements ne sont pas les mêmes partout. Ce serait trop long de publier ici toutes les nombreuses particularités de ces institutions; je me contenterai d'indiquer les conditions principales d'une de ces caisses.

Une caisse de ce genre a été créée à Amsterdam en 1750 par 101 hommes, sous la devise: „Voorziet uw huis" (Prenez soin de votre maison); elle commençait le 1 Août. On l'appelait aussi Contrat de Survivance. On avait déterminé comme suit les sommes à payer et les rentes annuelles que recevraient après la mort des membres leurs épouses ou plus généralement les femmes assurées.

Age	Somme à payer au commencement	Versement annuel
Au-dessous de 35 ans...	fl. 50	fl. 25
De 35 à 40 ans	,, 60	,, 25
,, 40 ,, 45 ,, ...	,, 70	,, 30
,, 45 ,, 50 ,, ...	,, 85	,, 30
,, 50 ,, 55 ,, ...	,, 100	,, 35
,, 55 ,, 60 ,, ...	,, 120	,, 35

Si la femme assurée etait plus jeune de 5 ans que l'homme qui l'assurait, ce dernier devait payer $\frac{1}{5}$ de plus tant au commencement qu'annuellement; si elle était plus jeune de 9 ans, $\frac{1}{4}$ de plus; de 12 ans, $\frac{1}{3}$ de plus; de 14 ans, la moitié de plus, de 16 ans, $\frac{3}{4}$ de plus et de 16 à 20 ans, le double. Si la différence des

1 Consultez les Annales néerlandaises du mois de Février de l'année 1749, p. 149—154, du mois d'Août de l'année 1750, p. 727—740, du mois de Mars de la même année, p. 260—268, de l'année 1749, p. 495, du mois d'Octobre de cette dernière année, p. 843—853, etc.

âges était encore plus grande, on ne pouvait prendre part à la caisse. — La rente annuelle des veuves était de fl. 200 la première année, de fl. 250 pendant chacune des deux années suivantes, puis de fl. 300 par an.

Parmi les 101 participants cinq n'avaient pas encore indiqué les noms des femmes. L'âge total des 96 hommes était de 3844 ans, donc d'un peu plus de 40 en moyenne; l'âge total des 96 femmes était de 3599 ans, donc de $37\frac{1}{2}$ ans à-peu-près pour chacune d'elles en moyenne.

Calcul d'une Caisse de Veuvage.

Si l'on veut faire un calcul exact au sujet de ces caisses, on rencontrera plus de difficultés qu'on n'en aperçoit à première vue. Il faudrait avoir quelques exemples de caisses déjà éteintes ou encore existantes, mais du moins pendant de longues années. Il faudrait connaître les âges des hommes et des femmes à l'époque du premier versement, ainsi que les âges auxquels les veuves s'étaient remariées ou avaient été perdues de vue; puis encore les dates des décès pour les deux sexes. On pourrait alors les réduire en classes et voir quelles règles on en pourrait déduire. Il me semble, il est vrai, qu'on trouvera quelque différence sous ce rapport d'une ville à une autre, ainsi que pour des personnes de condition différente; il paraît par exemple qu'on ne se remarie pas avec une égale fréquence quand on est riche et quand on est pauvre.

On ne doit donc pas s'attendre ici à un calcul parfaitement exact; nos considérations ne servent qu'à rendre probable que dans toutes ces caisses on paye trop aux femmes qui deviennent veuves les premières. Les auteurs des projets de ces caisses auraient-ils voulu donner des sommes incomparablement plus grandes aux premières veuves, dont les maris n'ont versé leur argent que pendant quelques années, qu'aux vieilles veuves, dont les maris ont payé les versements annuels si longtemps? Cela paraît peu raisonnable.

Les pasteurs de la classe de Dordrecht ont payé une rente plus petite aux veuves des pasteurs qui n'avaient fait partie de la classe que pendant six ans, qu'à celles dont les maris y avaient été 9, 12 ou 15 ans 1).

1) Consultez la Suite à la „Démonstration" de M. Jean van der Burg, Seigneur de Sliedrecht, p. 125, Dordrecht, 1738.

Les principales raisons pour lesquelles les veuves peuvent recevoir une rente annuelle supérieure au versement annuel de leurs maris, sont les suivantes. D'abord, on ne paye cette rente au commencement qu'à celles qui sont déjà devenues veuves; et les directeurs peuvent placer le reste du capital à un intérêt composé. En second lieu, lorsque les épouses meurent avant leurs maris, les veufs n'ont plus aucun droit à l'argent de la caisse; les sommes qu'ils y ont versées, sont donc entièrement au profit des autres.

Pour en donner un exemple, je suppose que mille couples mariés, dont les maris aient tous l'âge de 40 et les femmes l'âge de $37\frac{1}{2}$ ans, créent une caisse, à cette condition que chaque couple marié y verse annuellement 100 florins, depuis l'époque de la création, mais que ceux qui deviennent veufs, soient exempts de nouveaux payements, les sommes qu'ils ont déjà versées restant au profit de la caisse. La question est de savoir quelle rente on peut payer annuellement à chaque veuve, soit durant sa vie soit jusqu'au moment où elle se remarie (car dans ce dernier cas elle ne reçoit plus rien), si la société qui reçoit l'argent ou les directeurs de la caisse payent un intérêt annuel de 3 $^0/_0$.

Pour résoudre plus ou moins cette question je me servirai des deux tables de la vie des hommes et des femmes qu'on trouve dans l'Appendice à mes „Hypothèses sur l'Etat de l'espèce humaine" p. 231, et je déterminerai d'après le calcul des chances, en me servant de la méthode du docteur HALLEY 1) quel est le nombre des veuves qui reçoivent une rente. Pour abréger, je ferai le calcul à l'aide de logarithmes.

Dans la table des hommes je trouve que de 424 personnes âgées de 40 ans, 371 vivent encore après cinq ans, de sorte que 53 d'entre elles sont mortes. Sur 388 femmes agées de $37\frac{1}{2}$ ans, 43 sont mortes en 5 ans, de sorte qu'il en restait 445. Je fais ensuite les calculs suivants.

log. 488	2,6884	log. 1000	3,0000	log. 1000	3,0000	log. 1000	3,0000
„ 424	2,6273	„ 445	2,6483	„ 371	2,5693	„ 43	1,6334
	5,3157	„ 53	1,7242	„ 43	1,6334	„ 53	1,7242
			7,3725		7,2027		6,3576
			5,3157		5,3157		5,3157
			2,0568		1,8870		1,0419
Décédés:			114 hommes		77 femmes		11 couples mariés.

1) Philos. Trans. No. 196, p. 605.

En 5 ans 114 femmes sont donc devenues veuves, et 77 hommes sont devenus veufs. Onze couples mariés ont disparu. En tout 202 mariages ont donc été rompus par la mort, et après 5 ans il reste encore 798 couples mariés. Ceux qui n'entendent pas le calcul des logarithmes, peuvent trouver la même chose par l'arithmétique ordinaire. En effet, si l'on multiplie 1000 par 445 et ensuite le produit par 53, on trouvera 23585000. En divisant ce nombre par le produit de 488 et de 424, c.à.d. par 206912, on trouvera 114, comme ci-dessus. Pour les cinq années suivantes il faut commencer la multiplication par 798 au lieu de 1000, et ainsi de suite: il faut toujours se servir du nombre des mariages qui subsistent. Si l'on continue donc le calcul de la même manière, on trouvera que les nombres des mariages qui subsistent de cinq en cinq ans depuis le commencement sont les suivants: 798, 605, 422, 271, 159, 88, 39, 10, 3 et 1; tandisque les nombres des femmes qui deviennent veuves de cinq en cinq ans sont les suivants: 114, 106, 101, 81, 60, 34, 25, 13 et 2. On peut donc dire que les nombres annuels des femmes qui deviennent veuves, sont: 23, 23, 23, 23, 22, 22, 21, 21, 21, 21, 21, 21, 20, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 14, 13, 12, 11, 10, 8, 7, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1. Il s'agirait maintenant de savoir quel est le nombre de ces veuves qui se remarient chaque année, mais c'est là que se trouve la difficulté. On ne possède pas encore de statistique là-dessus, que je sache. Il faudrait le savoir pour tous les âges; les veuves jeunes se remarient évidemment beaucoup plus souvent que les veuves âgées. Je supposerai pour les âges considérés que $\frac{7}{30}$ des 536, c. à. d. du nombre total des veuves se remarient; je les distribue de la manière suivante sur les différentes années: 2, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 8, 8, 8, 6, 6, 6, 4, 4, 2, 1. Après ce temps j'admets que les veuves ne se remarient plus. Pour trouver maintenant le nombre des veuves qui doivent recevoir une rente annuelle, je retranche 2, nombre de celles qui se remarient, des 23 qui sont devenues veuves la première année; je suppose qu'aucune d'elles ne soit morte en cette année; il reste donc encore 21 veuves à qui l'on doit payer la rente au bout d'un an. L'année suivante 23 autres femmes deviennent veuves; il y en a donc 44, dont j'en retranche 4 que je suppose remariées et une que je suppose morte. Au bout de la deuxième année, une rente doit donc être payée à 39 veuves.

Je calcule les nombres des décès des veuves, d'après leur âge, à l'aide de la table des femmes dont j'ai parlé plus haut, et je continue ainsi, trouvant pour chaque année depuis la première le nombre des veuves qui reçoivent une rente. Voici ces nombres: 21, 39, 57, 73, 87, 101, 112, 122, 132, 140, 147, 155, 162, 169, 176, 182, 186, 191, 194, 198, 203, 208, 212, 215, 216, 215, 213, 210, 205, 198, 190, 183, 175, 167, 158, 147, 136, 125, 114, 103, 90, 77, 64, 51, 37, 23, 18, 14, 10, 6, 4, 2. Les nombres des couples mariés qui versent la somme convenue sont les suivants, depuis la première année: 1000, 960, 920, 880, 840, 798, 759, 720, 681, 643, 605, 568, 531, 494, 458, 422, 391, 361, 331, 301, 271, 248, 225, 203, 181, 159, 144, 130, 116, 102, 88, 78, 68, 58, 48, 39, 33, 27, 21, 15, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1. En me basant sur ces chiffres, je commence le calcul de la manière suivante. Mille couples mariés versent au commencement 100000 florins en argent comptant. Ajoutez-y l'intérêt d'une année, à un taux de 3 %, et puis fl. 96000 versés au bout d'un an; la somme sera de fl. 199000. J'appelle x le nombre des florins qui doivent être payés annuellement à chaque veuve; au bout d'un an la caisse contient donc 199000—21x florins. L'intérêt de cette somme, à un taux de 3 %, est de fl. 5970—0,63x. A cet intérêt j'ajoute l'argent qui se trouve dans la caisse, puis encore fl. 92000 qui représentent la somme versée à la fin de la deuxième année; de la somme je retranche 39 x, ce qui représente la rente totale à payer aux veuves en cette année. Le reste est de fl. 296970—60,73 x. C'est là le capital contenu dans la caisse au bout de deux ans. En continuant ainsi jusqu'à la mort de la dernière veuve et en égalant la dernière expression à zéro, on trouve qu'une rente annuelle de x = 327 florins doit être payée à chaque veuve dans les conditions indiquées. Le nombre total des payements annuels est de 6633; en divisant ce nombre par 536, celui des veuves, on trouve qu'en moyenne chacune d'elles a reçu la rente annuelle $12\frac{3}{8}$ fois. On pourrait objecter que le nombre des veuves qui se remarient est beaucoup plus grand et que par conséquent la rente annuelle des veuves peut être plus grande aussi. Si l'on démontre qu'il en est aussi, on devra changer la fraction qui donne le nombre des veuves qui se remarient, et faire ensuite le calcul d'après la même méthode. Mon seul but a été d'indiquer une méthode dont

on pourra se servir dès qu'on possédera une bonne statistique des nombres de veuves qui se remarient à chaque âge.

Considérons un groupe de 1000 couples jeunes et qui viennent de se marier. Je suppose que les maris et les femmes aient tous l'âge de 20 ans, et que les versements annuels et les autres conditions restent les mêmes que précédemment. Les nombres des couples mariés qui subsistent de cinq en cinq ans, calculés comme précédemment, sont: 880, 755, 636, 524, 414, 308, 212, 133, 77, 39, 17, 5, 2, 0; les femmes qui deviennent veuves sont, de cinq en cinq ans, aux nombres suivants: 62, 65, 64, 62, 60, 57, 50, 40, 28, 18, 9, 4, 1, 1. Leur nombre total est de 521. Je suppose que les $\frac{4}{15}$ se remarient; les nombres annuels de celles qui se remarient sont donc: 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. En raisonnant ensuite comme précédemment, je trouve qu'on peut payer à chaque veuve une rente annuelle de fl. $472\frac{1}{2}$. Le nombre total des rentes annuelles payées aux veuves est de 8141; en divisant ce nombre par 521, nombre des veuves, on trouve que chacune d'elles a reçu la rente annuelle $15\frac{5}{8}$ fois en moyenne.

Dans les villages de la Hollande septentrionale que j'ai fait recenser, le nombre des couples mariés est en général quatre fois plus grand que celui des veuves. Si chaque couple marié était obligé et en état de donner annuellement une même somme à toutes les veuves du village, chaque veuve pourrait recevoir par an le quadruple de la somme versée par chaque couple marié, car aussi longtemps que l'état général des villages reste à-peu-près le même, le rapport 4 : 1 ne variera pas beaucoup. En ce cas l'argent ne produirait pas d'intérêt vu qu'on le donnerait immédiatement aux veuves.

A Oost-Zaandam et à West-Zaandam les veuves pourraient obtenir le quintuple de la somme versée par un couple marié. A West-ter-Schelling le nombre des veuves est si grand en comparaison avec celui des couples mariés que chaque veuve pourrait à-peine recevoir le double de la somme annuelle versée par un couple marié. Cela provient de ce que beaucoup d'hommes qui habitent cet île, vont à la mer et que la partie de ces habitants-là qui meurent à la suite d'un accident est plus grand que la

partie correspondante de ceux qui restent sur la terre ferme; le nombre des veuves y est donc plus grand qu'ailleurs. Il existe un contrat, auquel ne peuvent être admis les couples mariés dont les maris vont à la mer ou servent dans l'armée. Par contre on a créé une caisse pour des veuves d'officiers marins au service de la Compagnie des Indes orientales; le réglement comprend 77 paragraphes. Il semble aussi qu'il y a une grande différence entre les nombres des veuves qui se marient dans diverses localités. Le nombre annuel des demoiselles qui se marient à Amsterdam est au nombre correspondant des veuves qui s'y marient comme 4 est à 1 environ; mais parmi les veuves quelques-unes sont comptées plusieurs fois en différentes années, vu qu'elles se remarient plus d'une fois.

Supposons qu'à chaque veuve jeune ou vieille du groupe considéré, dont les couples mariés ont l'âge de 20 ans, on veuille donner une fois un même nombre x de florins au lieu d'une rente annuelle. Je conclus de ce qui précède que les nombres des couples mariés qui doivent chaque année verser la somme convenue sont depuis la première année jusqu'à la dernière les suivants : 1000, 976, 952, 928, 904, 880, 855, 830, 805, 780, 755, 731, 707, 683, 659, 636, 613, 590, 568, 546, 524, 502, 480, 458, 436, 414, 392, 371, 350, 329, 308, 288, 269, 250, 231, 212, 196, 180, 164, 148, 133, 121, 110, 99, 88, 77, 69, 61, 53, 46, 39, 34, 29, 25, 21, 17, 14, 11, 9, 7, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1. Les nombres des femmes qui deviennent veuves chaque année sont, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 11, 11, 11, 10, 10, 10, 10, 10, 8, 8, 8, 8, 8, 7, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. En faisant le calcul je trouve que x est égal à fl. 5144; c'est là la somme qui doit être payée une fois pour toutes à chaque femme qui devient veuve.

Si la société qui reçoit les versements ne donnait pas d'intérêt aux veuves, mais se contentait de leur donner l'argent versé, en payant à chacune d'elles une fois pour toutes la même somme, cette somme serait d'un peu plus de fl. 4400.

Si l'on donnait un intérêt annuel de 3 %, chaque veuve (si je n'ai pas commis d'erreur de calcul) pourrait recevoir une fois pour toutes une somme de fl. 5268.

Lorsque les maris sont âgés de 40 ans et les femmes de

$37\frac{1}{2}$ ans et que la société qui reçoit l'argent ne donne pas d'intérêt mais se borne à restituer le capital reçu, chaque femme qui perd son mari pourrait recevoir une fois pour toutes fl. 2790. Mais si la société donne un intérêt de $2\frac{1}{2}$ $^0/_0$, chaque veuve pourrait recevoir une fois pour toutes fl. 3067.

Si, au lieu de cette dernière somme, on voulait payer une rente viagère à chaque veuve d'après son âge, au taux d'intérêt que nous avons indiqué, le tableau suivant fait voir quelle somme on pourrait donner à chacune d'elles.

Age des veuves	florins	
De $37\frac{1}{2}$ à $42\frac{1}{2}$ ans	194	rente annuelle nette.
,, $42\frac{1}{2}$,, $47\frac{1}{2}$,, ...	215	
,, $47\frac{1}{2}$,, $52\frac{1}{2}$,, ...	240	
,, $52\frac{1}{2}$,, $57\frac{1}{2}$,, ...	270	
,, $57\frac{1}{2}$,, $62\frac{1}{2}$,, ...	310	
,, $62\frac{1}{2}$,, $67\frac{1}{2}$,, ...	364	
,, $67\frac{1}{2}$,, $72\frac{1}{2}$,, ...	443	
$72\frac{1}{2}$ ans et au-dessus.	500	

Même lorsque les veuves se remarient, elles continuent à recevoir ces rentes jusqu'au jour de leur mort. La plupart des contrats, il est vrai, stipulent qu'elles perdent leurs rentes en se remariant.

A Amsterdam on a créé encore une autre caisse de 100 membres, sous la devise ,,Alles heeft een einde" (Chaque chose a sa fin). A l'époque de la création, il y avait dans cette société 84 couples mariés, dont les maris étaient âgés en moyenne de 41 ans et de 5 mois, les femmes de 38 ans et de 6 mois. — Dans la même ville on a créé une caisse avec le même nombre de participants sous la devise ,,Gedenkt te sterven" (Rappelez-vous que vous êtes mortels). Dans cette société il y avait 96 couples mariés, dont les maris avaient en moyenne l'âge de 39 ans et de $8\frac{1}{2}$ mois,

les femmes l'âge de 37 ans et de 7 mois. En prenant la moyenne pour les deux sociétés, je trouve que sur 180 couples mariés les maris avaient en moyenne l'âge de 40 ans et de 6 mois et les femmes l'âge de 38 ans. La différence des âges moyens des hommes et des femmes est de nouveau de 2 ans et de 6 mois, de même que dans la société „Voorziet uw huis". Le fait que les personnes qui ont pris part à la création de ces caisses de veuvage étaient en moyenne assez âgées, provient, me semble-t-il, de la cause suivante: d'abord les jeunes gens ne se figurent pas, le plus souvent, qu'ils sont exposés à mourir bientôt; en second lieu, ils ne seraient pas en état, dans bien des cas, à verser la somme nécessaire. J'ai pris ici un exemple de couples mariés jeunes, puisque les maris et les femmes n'avaient tous que vingt ans; mais c'était uniquement dans le but de trouver à-peu-près la plus grande valeur des rentes annuelles.

Je ferai suivre ici un tableau indiquant les rentes dues à chaque veuve dans le cas où les maris, à l'époque de la création de la caisse, ont chacun l'âge de 30 ans et leurs femmes l'âge de 28 ans; c'est là l'âge moyen des demoiselles qui se marient à Amsterdam. Je suppose de nouveau que 1000 couples mariés versent au commencement fl. 100 chacun, et ceux qui subsistent la même somme chacune des années suivantes et qu'on donne un intérêt de $2\frac{1}{2}$ % de l'argent reçu. Je trouve que les nombres des couples mariés qui subsistent de cinq en cinq ans sont: 844, 697, 556, 419, 292, 187, 111, 57, 25, 8, 2, 0 et ceux des femmes qui deviennent veuves, de cinq en cinq ans, 85, 82, 79, 78, 69, 56, 41, 27, 15, 7, 2, 1. J'en conclus qu'à chaque veuve on doit payer une fois pour toutes fl. 3954 et que les rentes annuelles qu'on peut leur payer, d'après leurs âges, sont les suivantes:

Age des veuves	Rentes annuelles	Age des veuves	Rentes annuelles
De 28 à 33 ans	fl. 215	De 53 à 58 ans	fl. 357
„ 33 „ 38 „	„ 230	„ 58 „ 63 „	„ 406
„ 38 „ 43 „	„ 252	„ 63 „ 68 „	„ 478
„ 43 „ 48 „	„ 280	„ 68 „ 73 „	„ 547
„ 48 „ 53 „	„ 317	73 ans et au-dessus	„ 600

Si l'on ne donnait pas d'intérêt, on devrait payer à chaque veuve, une fois pour toutes, fl. 3493. Les nombres précédents

auraient pu être arrondis; on aurait pu également en déduire une certaine somme pour les frais; il aurait été possible aussi de donner pour toutes les sociétés considérées un tableau des rentes à recevoir par les veuves entre des limites d'âge différent de 5 années. Mais notre but n'était pas de donner les chiffres d'une caisse de veuvage telle qu'elle peut exister dans la pratique; en effet, lorsque la théorie générale a été trouvée, chacun peut aisément en faire les applications nécessaires.

Il est évident qu'il est fort désavantageux pour la société qui reçoit l'argent de faire participer à la société des hommes vieux ayant des femmes jeunes. Les créateurs du contrat ,,Voorziet uw huis" l'ont bien vu; c'est pourquoi ils exigeaient une somme double au commencement, et des versements doubles aussi pour toutes les années suivantes, des couples dont la femme était beaucoup plus jeune que le mari; la différence toutefois ne pouvait dépasser 20 ans. Je suppose qu'un groupe de 1000 couples mariés prenne part à la société considérée et que chaque mari ait l'âge de 59 ans et chaque femme celle de 40 ans. Le premier versement doit être de fl. 240 dans ce cas, et le versement annuel de fl. 70. Pendant les deux premières années les veuves reçoivent chacune fl. 200 par an et pendant les deux années suivantes fl. 250 par an; puis fl. 300 par an. Je supposerai que la société qui reçoit l'argent paye un intérêt annuel de $2\frac{1}{2}$ %. Pour voir si une caisse de ce genre peut subsister, de telle manière qu'il est possible de payer la rente annuelle, je calcule, d'après la méthode suivie plus haut, les nombres annuels des couples mariés qui feront les versements; voici ces nombres: 1000, 929, 860, 792, 727, 668, 611, 554, 503, 454, 406, 364, 324, 289, etc. Les nombres annuels des femmes qui deviennent veuves sont les suivants: 52, 51, 50, 49, 44, 43, 42, 37, 36, 35, 30, 29, 25, etc. Je suppose qu'annuellement la dixième partie de toutes les veuves se remarient ou meurent (si quelqu'un pense qu'il faut adopter une autre fraction, il est libre de le faire), et je construis une table dont voici une partie.

Année	1	2	3	4	5	6	7
Veuves	52	47	42	38	34	31	28
		51	46	41	37	33	30
			50	45	41	37	33
				49	44	40	36
					44	40	36
						43	39
							42
	52	98	138	173	200	224	244

Les 7 chiffres de la dernière ligne donnent les nombres des veuves qui doivent chaque année recevoir leurs rentes. Pour les six années suivantes ces nombres sont 256, 266, 275, 278, 273 et 269 respectivement. On peut de la même manière trouver, s'il est nécessaire, les années suivantes. Je raisonne alors comme suit.

1000 couples versent chacun fl. 240	fl. 240000
1 année d'intérêt à un taux de $2\frac{1}{2}$ %	,, 6000
929 couples versent fl. 70 chacun après 1 année	,, 65030
	fl. 311030
Il faut en soustraire pour 52 veuves, recevant chacune fl. 200	,, 10400
	fl. 300630

Si l'on continue ce calcul de la même manière on trouvera que déjà au bout de 15 années il est impossible de payer tout ce qui a été promis et que les veuves alors en vie ne pourront obtenir que leurs parts des versements annuels des couples mariés

qui subsistent, parts qui ne constitueront pas le quart de ce qu'on leur a promis. Au bout de 13 ans il doit déjà y avoir eu 532 veuves, et après ce temps beaucoup d'autres femmes encore perdront leurs maris.

Dans tous les contrats précédents les premières femmes qui deviennent veuves ont un grand avantage: si elles ne se remarient pas, elles peuvent longtemps profiter de la caisse. Mais si l'on voulait égaliser quelque peu les avantages, pour éviter de grandes pertes, on pourrait proposer que chaque veuve recevra au commencement la somme nette que son mari a versée pour elle, avec l'intérêt convenable. Par exemple, si son mari avait versé fl. 100 tous les ans durant 14 années, elle devrait recevoir des premiers 100 florins, l'intérêt que cette somme produit en 14 ans. Si je prends un intérêt annuel simple de $2\frac{1}{2}$ %, la somme totale serait de fl. 35. L'intérêt que produisent en 13 ans les fl. 100 suivants est de fl. $32\frac{1}{2}$. On continue ce calcul jusqu'à 1 an. La somme de tous les intérêts est de fl. $262\frac{1}{2}$, le capital et l'intérêt font donc ensemble fl. $1662\frac{1}{2}$, et l'on pourrait y ajouter une somme presque égale à cause de l'avantage que chaque veuve tire de la circonstance que beaucoup de femmes meurent avant leurs maris. Quoique ce soit là une condition plus raisonnable, beaucoup de gens préféreront sans doute les conditions antérieurement mentionnées.

Les mortalités extraordinaires ou les périodes de fort bonne santé qui suivent immédiatement la création d'une caisse de veuvage, peuvent avoir sur les rentes une grande influence. En 1664 par exemple, 24148 personnes sont mortes à Amsterdam; c'est là probablement plus de la huitième partie de la population que la ville avait au commencement de cette année. Or, si l'on suppose que dans la première année après la création d'une caisse de veuvage pour 100 couples mariés, la huitième partie environ des maris meurent, donc 12 maris (ou même 10 seulement), on a déjà dix veuves au bout de cette année, nombre qui s'augmentera encore pendant les premières années suivantes des femmes qui perdront leurs maris en ces années, tandisque le montant des versements a déjà baissé d'une dixième partie à la fin de la première année. Ces considérations font voir que la caisse, dans un cas de ce genre, doit bientôt être épuisée. Pendant des périodes

de bonne santé qui suivent la création d'une caisse, celle-ci subsistera plus longtemps. On m'a fait savoir qu'au commencement du mois de Mai la caisse de veuvage dont la devise est ,,Alles heeft een einde'' n'avait encore aucune veuve à entretenir, tandis que la caisse ,,Gedenkt te sterven'' en avait déjà deux et la caisse ,,Voorziet uw huis'' trois.

Il me semble que dans presque toutes les caisses de veuvage créées jusqu'à présent on a promis de trop grandes rentes initiales aux veuves; plus tard, lorsqu'il sera impossible de payer la rente entière, il y a grand danger, me semble-t-il, que cette circonstance donnera lieu à de graves disputes.

Tout ce qui précède fait voir qu'il serait fort utile de savoir quelque chose de plus sur l'état du genre humain: il faudrait mieux connaître les changements qu'y produisent les naissances et les décès. Le meilleur moyen de parvenir à une connaissance plus profonde serait évidemment de faire des recensements exacts de la population des grandes villes, des provinces et des royaumes, et des nombres annuels des naissances et des décès qui y surviennent. Il serait donc fort désirable que le projet de loi offert il y a peu de temps au parlement, comme je l'ai appris de Londres, et qui propose de construire annuellement un régistre de la population de la Grande-Bretagne, ainsi que des statistiques exactes des nombres des naissances, des mariages et des décès dans tout le royaume — lequel, après avoir été approuvé par la chambre des communes et avoir été lu deux fois à la maison des lords, devait être mis entre les mains d'une commission, mais qui, à cause de la cessation des séances le 7 juin 1753 n'a pas été définitivement adopté — que ce projet, dis-je, fût adopté dans une séance ultérieure et devînt loi.

TABLE DES MATIÈRES.

I.

Pg.

Calcul des chances au jeu, au moyen de l'arithmétique et de l'algèbre, auquel est ajouté un traité des loteries et des intérêts.

II.

Hypothèses sur l'état de l'espèce humaine.

III.

Découvertes plus détaillées concernant l'état du genre humain, basées sur des expériences.

FAUTES D'IMPRESSION ET ADDITIONS.

Page	1 ligne	24	pas, considérés	lisez	pas considérés.
»	1 Note 1)	ligne 4	*Mémoirez*	»	*Mémoires*.
»	1 » 1)	» 6	snr	»	sur.
»	2 ligne	23	pourrai	»	pourrait.
»	8 »	1 et 2	et et	»	et.
»	19 »	34	parceq ue	»	parce que.
»	39 »	20	prix	»	pris.
»	267 »	27	de habitants	»	des habitants.
»	325 »	14	1507	»	1516.
»	355 Note 1)	ligne 1	Nom	»	Nous.

Le lecteur est prié de vouloir bien excuser les fautes d'impression qui nous ont échappé.

Pages 166 et 167. Dans son ouvrage „Suite de la description des comètes, etc." paru en 1753, STRUYCK fait encore les remarques suivantes à propos du carré magique.

„Un de mes amis m'avait dit que les nombres d'un carré magique de 16 places peuvent être arrangés de 5760 façons. Mais maintenant le même amateur a trouvé que le nombre total des arrangements est de 7040. J'ai découvert ce même nombre d'une tout autre manière, savoir en prenant les deux diagonales de toutes les différentes façons possibles; mais je n'ai pas construit les carrés correspondants à cause du grand travail que la construction aurait exigé. Les conditions sont les suivantes. Je suppose que sur un mur on ait dessiné un carré subdivisé en 16 carrés plus petits, dont les côtés supérieurs et inférieurs soient parallèles au sol et les autres verticaux. Il faut y placer tous les nombres, de 1 à 16, de telle manière que les chiffres soient verticaux et que la somme des nombres compris dans chaque ligne verticale, horizontale ou diagonale soit 34. On demande combien de carrés de ce genre l'on peut construire, l'ordre des nombres tant par rapport à eux-mêmes que par rapport aux places qu'ils occupent étant chaque fois différent. Je dois dire à la défense de M. FRENICLE qu'il me semble qu'il a connu le veritable nombre des arrangements possibles; mais comme ce qu'il a écrit là-dessus n'a été publié qu'après sa mort, il est permis de supposer que les personnes qui ont tiré les extraits de ses manuscrits y aient trouvé 880 carrés différents et qu'ils aient publié ce nombre dans la pensée qu'il indique le nombre total des arrangements possibles, tandis qu'en réalite il faut le multiplier par 8 à cause des interversions qu'on peut faire et parce que les lignes horizontales peuvent être rendues verticales. De cette façon l'accord est parfait."

Pages 290—292. STRUYCK a fait plus tard à-propos des habitants de la „localité importante" considérée la remarque suivante que nous reproduisons ici pour être complets.

„Le monsieur qui m'a communiqué la statistique de la localité dont il est question à la page 291, n'a pas tenu compte de la garnison. Voici comment elle était composée. La garde, comprenant 3 compagnies de cavalerie et un corps de hussards, était dans la ville; un corps de dragons, composé de 4 compagnies, se trouvait en-dehors de la ville. Il y avait en outre dans la ville un bataillon d'infanterie, composé de 6 compagnies. Quatre compagnies d'un deuxième bataillon d'infanterie étaient en-dehors de la ville, les autres compagnies dans la ville. Trois compagnies du troisième bataillon qui en comprenait six, étaient en garnison dans les environs immédiats de la ville, les autres à quelques lieues plus loin. Trois compagnies du quatrième bataillon se trouvaient dans les environs de la ville, les autres ailleurs. Il y avait en outre dans la ville une compagnie d'artilleurs, puis d'autres militaires encore aux postes extérieurs et une garde de recrues. Tel était dans cette localité l'état de la garnison au commencement de l'année 1751."

